

数 学

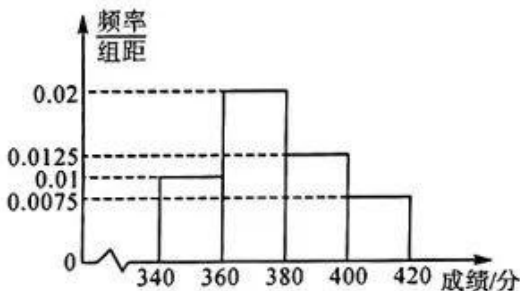
注意事项：

1. 本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \mathbb{R}$ ，集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x < 4\}$ ， $B = \{x \mid |x| \geq 2\}$ ，则 $(\complement_U B) \cup A =$
A. $(-2, 4)$ B. $(-4, 2)$ C. $(-2, 2)$ D. $(-4, 4)$
2. 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1| = 3, z_2 = 2 + i$ ，则 $|z_1 \cdot z_2| =$
A. $3\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{5}$ D. 6
3. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ，点 $P(x_0, 1) (x_0 > 0)$ 在抛物线 C 上，过 P 作 l 的垂线，垂足为 Q ，若 $|PO| = |PQ| (O$ 为坐标原点)，则 $x_0 =$
A. $2\sqrt{2}$ B. 3 C. $3\sqrt{2}$ D. 4
4. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, \sqrt{2})$ ， $\mathbf{b} = (\cos \theta, \sin \theta)$ (其中 $\theta \in (0, 2\pi)$)，若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|$ ，则 $\tan \theta =$
A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{6}$

5. 2023 年考研成绩公布不久，对某校“软件工程”专业参考的 200 名考生的成绩进行统计，可以得到如图所示的频率分布直方图，其中分组的区间为 $[340, 360)$ ， $[360, 380)$ ， $[380, 400)$ ， $[400, 420]$ ，同一组中的数据用该组区间的中间值作代表值，则下列说法中不正确的是



- A. 这 200 名学生成绩的众数为 370 分
- B. 这 200 名学生成绩的平均分为 377 分
- C. 这 200 名学生成绩的 70% 分位数为 386 分
- D. 这 200 名学生成绩在 $[400, 420]$ 中的学生有 30 人

【高三数学 第 1 页(共 4 页)】

6. 有一个正三棱柱形状的石料, 该石料的底面边长为 6. 若该石料最多可打磨成四个半径为 $\sqrt{3}$ 的石球, 则至少需要打磨掉的石料废料的体积为

- A. $216-4\sqrt{3}\pi$ B. $216-16\sqrt{3}\pi$ C. $270-16\sqrt{3}\pi$ D. $270-4\sqrt{3}\pi$

7. 已知函数 $f(x) = 4x^4 - 6tx^3 + (2t^2 + 6)x^2 - 3tx + 1 (x > 0)$, 若 $f(x)$ 的最小值为 0, 则 $t =$

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ D. $2\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - ax + e^3$. 若存在等差数列 $x_1, x_2, x_3, x_4 (x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$, 且 $x_1 + x_4 = 0$, 使得数列 $\{f(x_n)\} (n=1, 2, 3, 4)$ 为等比数列, 则 a 的最小值为

- A. $\frac{1}{4}e^3 + \frac{3}{4}e$ B. $\frac{3}{4}e^3 + \frac{1}{4}e$ C. $\frac{e^3 + e}{2}$ D. $\frac{2}{3}e^3 + \frac{1}{3}e$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 亚马逊大潮是世界潮涌之最, 当潮涌出现时, 其景、其情、其声, 真是“壮观天下无”, 在客观现实世界中, 潮汐的周期性变化现象, 我们通常需要借助于三角函数这一重要数学模型来研究.

已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi) (|\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称, 则下列选项正确的是

A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$

B. 直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}]$ 上单调递减

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内存在极值点

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, 前 n 项积为 T_n , 若 $T_7 > T_5 > T_8$, 则

- A. $0 < q < 1$ B. $q > 1$ C. $T_{13} > 1 > T_{11}$ D. $T_{14} > 1 > T_{15}$

11. 在 $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^n (n \in \mathbf{N}^+)$ 的展开式中, 有理项恰有两项, 则 n 的可能取值为

- A. 7 B. 9 C. 12 D. 13

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = t (t \in (0, 2))$ 与椭圆 C 交于 A, B 两点 (其中 A 在 B 的左侧), 记 $\triangle ABF_1$ 的面积为 S , 则

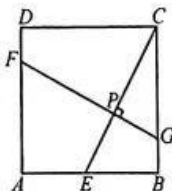
- A. $|F_1A| + |F_1B| = 4\sqrt{2}$ B. 当 $AF_1 \perp BF_1$ 时, $t = \sqrt{3}$
C. S 的最大值为 $2\sqrt{2}$ D. 当 $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$ 时, $S = \frac{8}{3}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 古希腊毕达哥拉斯学派在公元前 6 世纪研究过正五边形和正十边形的作图, 发现了黄金分割值约为 0.618, 这一数值也可以表示为 $a = 2\cos 72^\circ$, 则 $\frac{a\cos 18^\circ}{\sqrt{2}-a} =$ _____.

14. 已知 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 2 = \frac{\sqrt{ab}-4ab}{2ab} (a > 0, b > 0)$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值为 _____.

15. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, E 是边 AB 上的一动点, $FG \perp EC$ 交 EC 于点 P , 且直线 FG 平分正方形 $ABCD$ 的周长, 当线段 BP 的长度最小时, 点 A 到直线 BP 的距离为 _____.



16. 若曲线 $y = \frac{a}{x} (x > 0)$ 与曲线 $y = 2\ln x$ 存在公切线, 则 a 的取值范围为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $A = \frac{\pi}{3}$ ，且 $\triangle ABC$ 的周长为 6。

(1) 证明： $bc + 12 = 4(b + c)$ ；

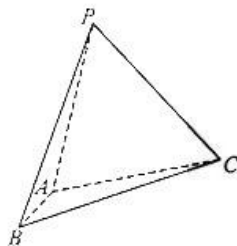
(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值。

18. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB \perp$ 平面 ABC ， $\angle PBA = \angle CBA = 45^\circ$ ， $BP = BC = 2\sqrt{2}$ ， $AB = 1$ 。

(1) 证明： $AB \perp PC$ ；

(2) 求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值。



19. (本小题满分 12 分)

有三种不同的果树苗 A, B, C ，经引种试验后发现，引种树苗 A 的自然成活率为 0.6，引种树苗 B, C 的自然成活率均为 p ($0.6 \leq p \leq 0.8$)。

(1) 任取树苗 A, B, C 各一株，设自然成活的株数为 X ，求 X 的分布列及 $E(X)$ ；

(2) 将(1)中的 $E(X)$ 取得最小值时的 p 的值作为 B 种树苗自然成活的概率。该农户决定引种 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 株 B 种树苗，引种后没有自然成活的树苗中有 80% 的树苗可经过人工栽培技术处理，处理后成活的概率为 0.5，其余的树苗不能成活。

① 求一株 B 种树苗最终成活的概率；

② 若每株树苗引种最终成活后可获利 400 元，不成活的每株亏损 60 元，该农户为了获利不低于 30 万元，应至少引种 B 种树苗多少株？

20. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数, $a_1=1, a_{n+1}>a_n$, 且 $a_{n+2}+a_n=a_2 \cdot a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

- (1) 若数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等差数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;
 (2) 若数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 为等比数列, 且数列 $\{a_n\}$ 不为等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的焦距为 8. 过左焦点 F 的直线与双曲线 C 的左支交于 A, B 两点, 分别过 A, B 两点作直线 $l: x=-1$ 的垂线, 垂足分别为 M, N . 且当 AB 垂直于 x 轴时, $|MN|=12$.

- (1) 求双曲线 C 的标准方程;
 (2) 设点 $P(2\sqrt{3}-1, 0)$, 判断是否存在 $t>0$, 使得 $\frac{1}{|PM|-t} - \frac{1}{|PN|-t}$ 为定值? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 \ln x - a (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
 (2) 若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 证明: $1 < x_1 + x_2 < \frac{2}{\sqrt{e}}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线

