重庆南开中学高2022级高三第一次质量检测

数学试题

2021.9

命审单位:重庆南开中学

注意事项:

1. 本试卷满分150分,考试时间120分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$, $N=\{-2,2\}$, 则下列结论成立的是

A. $N\subseteq M$　　B. $M\cup N=M$

C. $M\cap N=N$　　D. $M\cap N=\{2\}$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$ 的定义域为

A. $(-5,-1)$　　B. $(-5,1)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-1,5)$

3. 若 $x,y\in\mathbf{R}$, 则 $x+y>0$ 的一个充分不必要条件是

A. $x+y>-1$　　B. $x>y>0$

C. $xy>0$　　D. $x^2-y^2>0$

4. 若曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}-ax^2(a\in\mathbf{R})$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行, 则 $a=$

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

5. 若 $x>0,y>0$ 且 $x+y=xy$, 则 $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2y}{y-1}$ 的最小值为

A. 3　　B. $\dfrac{5}{2}+\sqrt{6}$

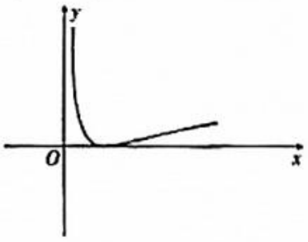
C. $3+\sqrt{6}$　　D. $3+2\sqrt{2}$

6. 动直线 $x=m(m>0)$ 与函数 $f(x)=x^2+x$, $g(x)=\ln x$ 的图象分别交于点 A,B, 则 $|AB|$ 的最小值为

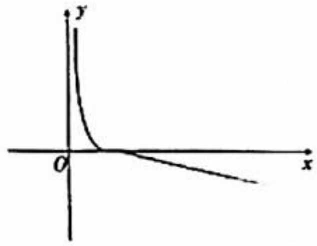
A. $\dfrac{3}{4}+\ln 2$　　B. $3\ln 2$

C. $\dfrac{3}{2}+\ln 2$　　D. $3-\ln 2$

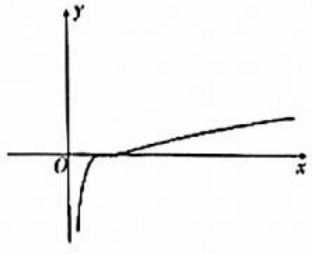
7. 函数$f(x)=|\ln x|-\left|1-\dfrac{1}{x}\right|$的图象大致是



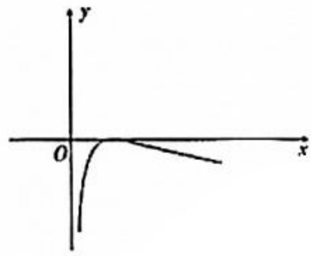
A



B



C



D

8. 已知函数$f(x)=a^{x-1}+a^{1-x}(a>1)$，对$\forall t\in\mathbf{R}$，均$\exists x_1,x_2\in[t,t+2]$，使得$f(x_1)-f(x_2)\geqslant 1$成立，则$a$的最小值为

A. 2　　B. $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　D. 4

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 设$a=5^{0.6}$，$b=0.6^5$，$c=\log_{0.6}0.5$，$d=\log_5 0.6$，则在a,b,c,d这4个数中

A. 最大数为a　　B. 最小数为b

C. 最大数为c　　D. 最小数为d

10. 关于函数$f(x)=|\log_a x|\cdot a^x-1(0<a<1)$，下列说法正确的有

A. $\forall 0<a<1$，$f(x)$至少有两个零点　　B. $\forall 0<a<1$，$f(x)$只有两个零点

C. $\exists 0<a<1$，$f(x)$只有一个零点　　D. $\exists 0<a<1$，$f(x)$有三个零点

11. 已知定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x)=-f\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$，$f(-1)=1$，$f(0)=-2$，且$f\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$为奇函数，则

A. $f(x)$为奇函数　　B. $f(x)$为偶函数

C. $f(x)$是周期为3的周期函数　　D. $f(0)+f(1)+\cdots+f(2021)=0$

12. 对于函数$\varphi(x)$，如果对任意$x_1,x_2\in D$都有$\varphi\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)]$成立，则称此函数为区间$D$上的"凸函数". 若$f(x)$，$g(x)$均是区间$D$上的"凸函数"，且满足$f(x)>0$，$g(x)>0$，$f(x)$与$g(x)$的单调性相反，则下列函数一定是区间$D$上的"凸函数"的是

A. $f(x)+g(x)$　　B. $f(x)-g(x)$

C. $f(x)\cdot g(x)$　　D. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若函数 $f(x)=2+\dfrac{a}{e^x-1}$ 为奇函数，则 $a=$ ________.

14. 定义在R上的函数 $f(x)$ 单调递增，且对 $\forall x\in \mathbf{R}$，恒有 $f(f(x)-2^x)=3$，则 $f(\log_4 3)=$ ________.

15. 若函数 $f(x)=\dfrac{\cos x+a}{\sin x}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围为________.

16. 若 $m(e^m+2021)=(n+2021)\ln n=t(t>0)$，则 $\dfrac{\ln t}{m(n+2021)}$ 的最大值为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 对 $\forall x\in \mathbf{R}$ 有 $f(x)\leqslant f(2)$，且函数 $g(x)=\log_2(f(x)-x)$ 的定义域为 $(1,2)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $t>0$，求 $f(x)$ 在 $[0,t]$ 上的值域.

18. (12分) 某企业自主开发出一款新产品 A，计划在2022年正式投入生产，已知 A 产品的前期研发总花费为50000元，该企业每年最多可生产4万件 A 产品. 通过市场分析知，在2022年该企业每生产 x（千件）A 产品，需另投入生产成本 $R(x)$（千元），且 $R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+60x, & 0<x\leqslant 10\\ 70x+\dfrac{1800}{x}-230, & 10<x\leqslant 40\end{cases}$

(1) 求该企业生产一件 A 产品的平均成本 p（元）关于 x 的函数关系式，并求平均成本 p 的最小值；（总成本 = 研发成本 + 生产成本）

(2) 该企业欲使生产一件 A 产品的平均成本 $p\leqslant 66$ 元，求其年生产量 x（千件）的取值区间？

19. (12分) 已知函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}$，$a\in \mathbf{R}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若经过坐标原点恰好可作两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 a 的取值范围.

20.（12 分）某单位规定每位员工每年至少参加两项专业技能测试，测试通过可获得相应学分，每年获得的总学分不低于 10 分，该年度考核为合格. 该单位员工甲今年可参加的专业技能测试有 A、B、C、D 四项，已知这四项专业技能测试的学分及员工甲通过各项专业技能测试的概率如下表所示，且员工甲各项专业技能测试是否通过相互独立.

培训项目	A	B	C	D
学分	5 分	6 分	4 分	8 分
员工甲通过测试的概率	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$

（1）若员工甲参加 A、B、C 三项测试，求他本年度考核合格的概率；

（2）员工甲欲从 A、B、C、D 中选择三项参加测试，若要使他本年度考核合格的概率不低于$\frac{3}{4}$，应如何选择？请求出所有满足条件的方案.

21.（12 分）已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，原点 O 关于点 F 的对称点为 Q，点 $P(0,1)$ 关于点 Q 的对称点 P_1 也在抛物线 C 上.

（1）求 p 的值；

（2）设直线 l 交抛物线 C 于不同两点 A、B，直线 PA，PB 与抛物线 C 的另一个交点分别为 M、N，$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{PB}$，且$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=2$，求直线 l 的横截距的最大值.

22.（12 分）已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}ax^2-x+2(a\in\mathbf{R})$ 有两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

（1）求 a 的取值范围；

（2）若 $f(x_2)>\frac{x_2}{2}$，求 a 的取值范围.

重庆南开中学高2022级高三第一次质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题

1－4 DCBA　5－10 DACC

二、多项选择题

9. AD　10. CD　11. BCD　12. AC

三、填空题

13. 4　14. $\sqrt{3}+1$　15. $[-1,+\infty)$　16. $\frac{1}{e}$

四、解答题

17. (1) 由 $f(x)\leqslant f(2)$ 知 $a<0$ 且 $-\frac{b}{2a}=2$，由题知 $f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c>0$ 的解集为 $(1,2)$，

故 $-\frac{b-1}{a}=3$，$\frac{c}{a}=2$，$\therefore a=-1,b=4,c=-2$，即 $f(x)=-x^2+4x-2$；

(2) $y=f(x)$ 是开口向下，对称轴为 $x=2$ 的抛物线，$f(0)=-2$，$f(t)=-t^2+4t-2$，$f(2)=2$

当 $0<t\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $[0,t]$ 上的值域为 $[-2,-t^2+4t-2]$；

当 $2<t<4$ 时，$f(x)$ 在 $[0,t]$ 上的值域为 $[-2,2]$；

当 $t\geqslant 4$ 时，$f(x)$ 在 $[0,t]$ 上的值域为 $[-t^2+4t-2,2]$.

18. (1) 由题知生产 x 千件的总成本为 $(R(x)+50)$ 千元，故一件的平均成本为 $\frac{R(x)+50}{x}$ 元，

$$\therefore p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+60+\frac{50}{x}, & 0<x\leqslant 10,\\ 70+\frac{1800}{x^2}-\frac{180}{x}, & 10<x\leqslant 40.\end{cases}$$

当 $x\in(0,10]$ 时，$p(x)=\frac{1}{2}x+60+\frac{50}{x}$ 单调递减，故最小值为 $p(10)=70$，

当 $x\in(10,40]$ 时，$p(x)=1800\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{20}\right)^2+65.5$，故最小值为 $p(20)=65.5$，

所以生产一件 A 产品的平均成本最低为 65.5 元.

(2) 由 (1) 知，要使 $p(x)\leqslant 66$ 只需考虑 $x\in(10,40]$，即 $70+\frac{1800}{x^2}-\frac{180}{x}\leqslant 66$，

整理得 $x^2-45x+450\leqslant 0$，解得 $15\leqslant x\leqslant 30$，

所以，当 $x\in[15,30]$ 时，生产一件 A 产品的平均成本不超过 66 元.

19. (1) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}, x>0$,

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单减，在 $(a,+\infty)$ 上单增；

(2) 设切点横坐标为 x_0，则切线方程为 $y=\left(\frac{1}{x_0}-\frac{a}{x_0^2}\right)x+\ln x_0+\frac{2a}{x_0}-1$，代入 $(0,0)$ 得 $\ln x_0+\frac{2a}{x_0}-1=0$，

即 $2a=x_0-x_0\ln x_0$，由题知此关于 x_0 的方程在 $(0,+\infty)$ 内恰有两个解，

令 $g(x)=x-x\ln x$，则 $g'(x)=-\ln x$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增，在 $(1,+\infty)$ 上单减，

又 $g(1)=1$，当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to 0$，$g(e)=0$，故当 $0<2a<1$ 时，方程 $g(x)=2a$ 有两个解，

$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$.

20. (1) 由题知，员工甲本年度考核合格必须通过 B 测试，且 A、C 测试中至少有一项通过，

故其考核合格的概率为 $P=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{29}{40}$；

(2) ①若选择 A、C、D 三项测试，则必须通过 D 测试，且 A、C 测试中至少有一项通过，

故员工甲考核合格的概率为 $P_1=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{29}{60}<\frac{3}{4}$；

②若选择 A、B、D 三项测试，则需任意两项测试通过或三项测试均通过，故员工甲考核合格的概率为

$P_2=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{31}{40}>\frac{3}{4}$；

③若选择 B、C、D 三项测试，则需任意两项测试通过或三项测试均通过，

故员工甲考核合格的概率为 $P_3=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{19}{24}>\frac{3}{4}$；

结合(1)中 $\frac{29}{40}<\frac{3}{4}$ 知，满足条件的方案为 A、B、D 和 B、C、D.

21. (1) 由题知 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，$Q(p,0)$，故 $P_1(2p,-1)$，代入 C 的方程得 $1=4p^2$，$\therefore p=\frac{1}{2}$；

(2) 设直线 l 的方程为 $x=my+t$，与抛物线 $C: y^2=x$ 联立得 $y^2-my-t=0$，

由题知 $\Delta=m^2+4t>0$，可设方程两根为 y_1,y_2，则 $y_1+y_2=m$，$y_1y_2=-t$，(*)

由 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA}$ 得 $(x_M,y_M-1)=\lambda(y_1^2,y_1-1)$，$\therefore x_M=\lambda y_1^2$，$y_M=\lambda y_1+1-\lambda$，

又点 M 在抛物线 C 上，$\therefore(\lambda y_1+1-\lambda)^2=\lambda y_1^2$，化简得 $(\lambda-1)[\lambda(y_1-1)^2-1]=0$，

由题知 M，A 为不同两点，故 $\lambda\neq 1$，$\therefore\lambda(y_1-1)^2=1$，即 $\frac{1}{\lambda}=(y_1-1)^2$，同理可得 $\frac{1}{\mu}=(y_2-1)^2$，

$\therefore(y_1-1)^2+(y_2-1)^2=(y_1+y_2)^2-2(y_1+y_2)-2y_1y_2+2=2$，

将(*)式代入得 $m^2-2m+2t=0$，即 $t=m-\frac{m^2}{2}$，将其代入 $m^2+4t>0$ 解得 $0<m<4$，

$\therefore t=m-\frac{m^2}{2}=-\frac{1}{2}(m-1)^2+\frac{1}{2}$ 在 $m=1$ 时取得最大值 $\frac{1}{2}$，即直线 l 的最大横截距为 $\frac{1}{2}$.

22. (1) $f'(x)=e^x-ax-1$，$f'(0)=0$，由题知 $f'(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，$f''(x)=e^x-a$，

若 $a\leqslant 0$ 则 $f''(x)>0$ 恒成立，$\therefore f'(x)$ 在 R 上单增，$f'(x)$ 有唯一零点，不合题意，舍；

若 $a>0$ 则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单增，又 $x\to\pm\infty$ 时 $f'(x)\to+\infty$ 且 $f'(0)=0$，

故当且仅当 $\ln a\neq 0$ 即 $a\neq 1$ 时，$f'(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单增，

在 (x_1,x_2) 上单减，x_1 为极大值点，x_2 为极小值点，符合题意；

综上，$0<a<1$ 或 $a>1$；

(2) 由(1)知，当 $\ln a<0$ 即 $0<a<1$ 时，$x_1<0$，$x_2=0$，故 $f(x_2)=f(0)=3>0$，符合题意；

当 $\ln a>0$ 即 $a>1$ 时，$x_1=0$，$x_2>0$ 且 $e^{x_2}-ax_2-1=0$，$\therefore a=\dfrac{e^{x_2}-1}{x_2}$，

$f(x_2)>\dfrac{x_2}{2}$ 即 $e^{x_2}-\dfrac{1}{2}(e^{x_2}-1)x_2-x_2+2>\dfrac{x_2}{2}$，化简得 $(x_2-2)(e^{x_2}+2)<0$，$\therefore x_2<2$，

令 $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$，令 $h(x)=(x-1)e^x+1$，当 $0<x<2$ 时，$h'(x)=xe^x>0$，

$\therefore h(x)$ 单增，故 $h(x)>h(0)=0$ 即 $g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单增，

又 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$，$g(2)=\dfrac{e^2-1}{2}$，$\therefore a\in\left(1,\dfrac{e^2-1}{2}\right)$，

综上，$0<a<1$ 或 $1<a<\dfrac{e^2-1}{2}$.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，

是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。