

石家庄市2023届高中毕业年级教学质量检测(一)

数 学

(时间120分钟,满分150分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题的答案后,用2B铅笔把答题卡上的对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
3. 在答题卡上与题号相对应的答题区域内答题,写在试卷、草稿纸上或答题卡非题号对应的答题区域的答案一律无效。不得用规定以外的笔和纸答题,不得在答题卡上做任何标记。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{x+3}\}$, $B = \{x | |x-2| < 1\}$, 则 $A \cup B = (\quad)$
 A. $(-3, +\infty)$ B. $[-3, +\infty)$ C. $(-3, 3)$ D. $[-3, 3)$
2. 复数 z 在复平面内对应的点为 $(-2, 1)$, 则 $|\bar{z} + 3i| = (\quad)$
 A. 8 B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$
3. 截至2023年2月,“中国天眼”发现的脉冲星总数已经达到740颗以上,被称为“中国天眼”的500米口径球面射电望远镜(FAST),是目前世界上口径最大,灵敏度最高的单口径射电望远镜(图1)。观测时它可以通过4450块三角形面板及2225个触控器完成向抛物面的转化,此时轴截面可以看作抛物线的一部分。某学校科技小组制作了一个FAST模型,观测时呈口径为4米,高为1米的抛物面,则其轴截面所在的抛物线(图2)的顶点到焦点的距离为()



图1

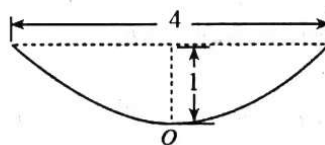


图2

- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为各项均为正数的等比数列, $a_1=4$, $S_3=84$, 则 $\log_2(a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)$ 的值为()
 A. 70 B. 72 C. 74 D. 76
5. “ $a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ”是“圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $C_2: (x-a)^2 + (y+a)^2 = 1$ 有公切线”的()
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 为推进体育教学改革和发展,提升体育教学质量,丰富学校体育教学内容,某市根据各学校工作实际,在4所学校设立兼职教练岗位.现聘请甲、乙等6名教练去这4所中学指导体育教学,要求每名教练只能去一所中学,每所中学至少有一名教练,则甲、乙分在同一所中学的不同的安排方法种数为()
- A. 96 B. 120 C. 144 D. 240
7. 设向量 a, b 满足 $|a|=2, |b|=1$,若 $\exists t \in \mathbf{R}, |a+tb| < |a+b|$,则向量 a 与 b 的夹角不等于()
- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°
8. 已知 $a = \frac{2}{7}, b = \ln 1.4, c = e^{0.2} - 1$,则()
- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 下列说法正确的是()
- A. 一组数据6, 7, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 22的第80百分位数为16
- B. 若随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$,且 $P(\xi > 5) = 0.22$,则 $P(-1 < \xi < 5) = 0.56$
- C. 若随机变量 $\xi \sim B(9, \frac{2}{3})$,则方差 $D(2\xi) = 8$
- D. 若将一组数据中的每个数都加上一个相同的正数 x ,则平均数和方差都会发生变化
10. 设函数 $f(x) = \cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x$ ($\omega > 0$)的最小正周期为 π ,则()
- A. $\omega = 1$
- B. 函数 $y = f(x)$ 的图象可由函数 $y = 2 \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个长度单位得到.
- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 中心对称
- D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8})$ 上单调递增
11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2, M, N 分别是 AB, CC_1 的中点,则()
- A. $AC_1 \parallel MN$
- B. $B_1D \perp MN$
- C. 平面 MND 截此正方体所得截面的周长为 $\frac{5\sqrt{5} + \sqrt{17}}{2}$
- D. 三棱锥 B_1-MND 的体积为3
12. 设 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数,且 $y = f(2x+2\pi)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{2}$ 对称,若 $0 < x \leq \pi$ 时,
 $f(x) = (e^x - e^{-x}) \cos x$,则()
- A. $f(x+\pi)$ 为偶函数
- B. $f(x)$ 在 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 上单调递减
- C. $f(x)$ 在区间 $[0, 2023\pi]$ 上有4046个零点
- D. $\sum_{k=1}^{2023} f(k\pi) = 1 - e^\pi$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分，其中第15小题第一空2分，第二空3分。

13. 曲线 $y = e^x - x^3$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线的斜率为_____.
14. $(x - \frac{3}{x})^n$ 展开式中所有奇数项的二项式系数和为32，则展开式中的常数项为_____。(用数字作答)
15. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点， B 是 C 的上顶点，过 F_1 的直线交 C 于 P, Q 两点， O 为坐标原点， $\triangle OBF_1$ 与 $\triangle PQF_2$ 的周长比为 $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ ，则椭圆的离心率为_____；如果 $BF_1 = \sqrt{2}$ ，且 $BF_1 \perp PQ$ ，则 $\triangle PQF_2$ 的面积为_____.
16. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{8}{1 - \cos x} (0 < x < \pi)$ ，则 $f(x)$ 的最小值是_____.

四、解答题：本题共6小题，共70分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分10分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边长分别为 a, b, c ，设 $\frac{a+b}{c-b} = \frac{\sin C + \sin B}{\sin A}$.

(I) 求 C ;

(II) 若 $(\sqrt{3} + 1)a + 2b = \sqrt{6}c$ ，求 $\sin A$.

18. (本小题满分12分)

植物生长调节剂是一种对植物的生长发育有调节作用的化学物质，它在生活中的应用非常广泛.例如，在蔬菜贮藏前或者贮藏期间，使用一定浓度的植物生长调节剂，可抑制萌芽，保持蔬菜新鲜，延长贮藏期.但在蔬菜上残留的一些植物生长调节剂会损害人体健康.某机构研发了一种新型植物生长调节剂 A ，它能延长种子、块茎的休眠，进而达到抑制萌芽的作用.为了测试它的抑制效果，高三某班进行了一次数学建模活动，研究该植物生长调节剂 A 对甲种子萌芽的具体影响，通过实验，收集到 A 的浓度 $u(\text{mol/L})$ 与甲种子发芽率 Y 的数据.

表(一)

A 浓度 u (mol/L)	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
发芽率 Y	0.94	0.76	0.46	0.24	0.10

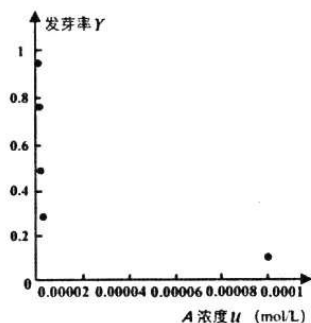


图1

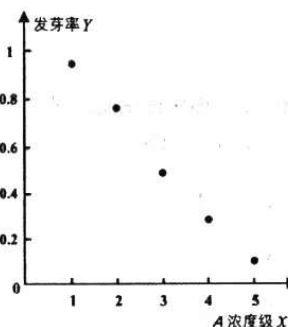


图2

若直接采用实验数据画出散点图，(如图1所示)除了最后一个数据点外，其他各数据点均紧临坐标轴，这样的散点图给我们观察数据背后的规律造成很大的障碍，为了能够更好的观察现有数据，将其进行等价变形是一种有效的途径，通过统计研究我们引进一个中间量 x ，令 $x = \frac{1}{2} \lg u + 7$ ，通过 $x = \frac{1}{2} \lg u + 7$ ，将 A

浓度变量变换为 A 的浓度级变量, 得到新的数据.

表(二)

A 浓度 u (mol/L)	10^{-12}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}
A 浓度级 x	1	2	3	4	5
发芽率 Y	0.94	0.76	0.46	0.24	0.10

(I) 如图2所示新数据的散点图, 散点的分布呈现出很强的线性相关特征. 请根据表中数据, 建立 Y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$;

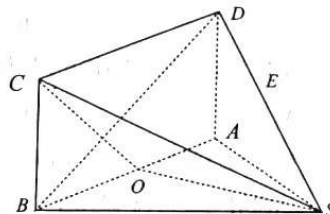
(II) 根据得到的经验回归方程, 要想使得甲种子的发芽率不高于 0.4, 估计 A 浓度至少要达到多少 mol/L?

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

19. (本小题满分12分)

如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形且垂直于侧面 SAB , O 为 AB 的中点, $SA=SB=AB=2$, $AD = \sqrt{2}$.



(I) 证明: $BD \perp$ 平面 SOC ;

(II) 侧棱 SD 上是否存在点 E , 使得平面 ABE 与平面 SCD 夹角的余弦值为 $\frac{1}{5}$, 若存在, 求 $\frac{SE}{SD}$ 的值; 若不存在, 说明理由.

20. (本小题满分12分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n ($n \in \mathbb{N}^*$), 满足 $3a_2 + 2a_3 = S_5 + 6$.

(I) 若数列 $\{S_n\}$ 为单调递减数列, 求 a_1 的取值范围;

(II) 若 $a_1 = 1$, 在数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与第 $n+1$ 项之间插入首项为 1, 公比为 2 的等比数列的前 n 项, 形成新数列 $\{b_n\}$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_{95} .

21. (本小题满分12分)

已知点 $P(4, 3)$ 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上, 过 P 作 x 轴的平行线, 分别交双曲线 C 的两条渐近线于 M, N 两点, $|PM| \cdot |PN| = 4$.

(I) 求双曲线 C 的方程;

(II) 若直线 $l: y = kx + m$ 与双曲线 C 交于不同的两点 A, B , 设直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 从下面两个条件中选一个 (多选只按先做给分), 证明: 直线 l 过定点.

① $k_1 + k_2 = 1$; ② $k_1 k_2 = 1$.

22. (本小题满分12分)

伯努利不等式, 又称贝努利不等式, 由数学家伯努利提出: 对于实数 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 正整数 n 不小于 2, 那么 $(1+x)^n \geq 1+nx$. 研究发现, 伯努利不等式可以推广, 请证明以下问题.

(I) 证明: 当 $a \in [1, +\infty)$ 时, $(1+x)^a \geq 1+ax$ 对任意 $x > -1$ 恒成立;

(II) 证明: 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n < (n+1)^n$ 恒成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线