

# 湘豫名校联考

## 2023年8月高三秋季入学摸底考试

### 数 学

#### 注意事项:

1. 本试卷共6页。时间120分钟,满分150分。答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置,并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上,然后认真核对条形码上的信息,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。作答非选择题时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$ ,  $B = \{x | y = \ln(x+1)\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$   
A.  $(-3, -1]$     B.  $(-1, 3)$     C.  $(-2, -1]$     D.  $(-1, +\infty)$

2. 设  $i$  是虚数单位,若复数  $z$  满足  $\frac{2-i}{z} - i = 1$ , 则  $z$  的共轭复数  $\bar{z}$  的虚部为  
A.  $-\frac{3}{2}i$     B.  $\frac{3}{2}i$     C.  $-\frac{3}{2}$     D.  $\frac{3}{2}$

3. 已知直线  $l: y = 2\sqrt{2}x + b$  与圆  $C: (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$  相切, 则实数  $b =$   
A.  $8 - 2\sqrt{2}$  或  $-10 - 2\sqrt{2}$     B.  $-11$  或  $9$   
C.  $11$  或  $-9$     D.  $-8 + 2\sqrt{2}$  或  $10 + 2\sqrt{2}$

4. 已知角  $\alpha$  的终边上一点  $A(4, 3)$ , 且  $\tan(\alpha + \beta) = 2$ , 则  $\tan(3\pi - \beta) =$   
A.  $\frac{1}{2}$     B.  $-\frac{1}{2}$     C.  $\frac{5}{2}$     D.  $-\frac{5}{2}$

5. 已知向量  $a$  在  $b$  方向上的投影向量的模为  $\sqrt{2}$ , 向量  $b$  在  $a$  方向上的投影向量

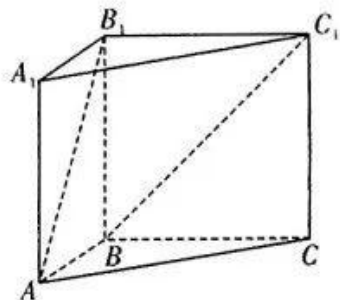
数学试题 第1页(共6页)

的模为 1, 且  $(a+b) \perp (2a-3b)$ , 则  $\langle a, b \rangle =$

- A.  $30^\circ$       B.  $45^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $135^\circ$

6. 如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB=BC=AC=AA_1$ , 则异面直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成角的余弦值等于

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$   
C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{4}$



7. 过抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  的焦点  $F$  的直线  $l$  交  $C$  于  $A, B$  两点, 若直线  $l$  过点  $P(1, 0)$ , 且  $|AB| = 8$ , 则抛物线  $C$  的准线方程是

- A.  $y = -3$       B.  $y = -2$       C.  $y = -\frac{3}{2}$       D.  $y = -1$

8. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-1-x} + 2, & x < -1, \\ 2 - 2^{x+1}, & x > -1, \end{cases}$  则  $f(x)$  的图象关于

- A. 点  $(1, -2)$  对称      B. 点  $(-1, 2)$  对称  
C. 直线  $x = 1$  对称      D. 直线  $x = -1$  对称

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知二项式  $(x^m + \frac{1}{x})^n (m, n \in \mathbb{N}^*)$  展开式的第 5 项为 15, 则

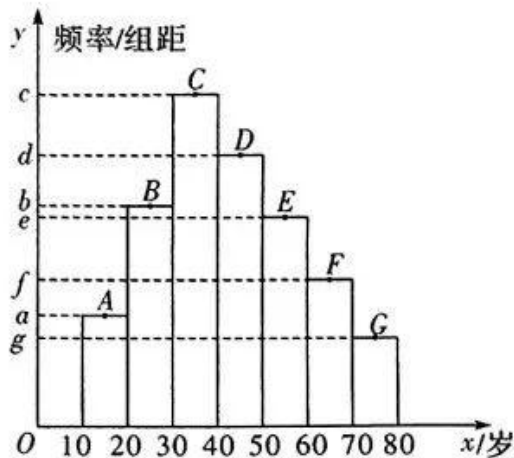
- A.  $A_n^m = 360$   
B.  $C_{n+m}^{n-m} = \frac{A_8^4}{A_4^4}$   
C.  $(x^m + \frac{1}{x})^n$  展开式的系数的最大值为 20  
D.  $(x^m + \frac{1}{x})^n$  展开式的各项系数之和为 64

10. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_m + a_n = a_{m+n}, m, n \in \mathbb{N}^*$ , 则下列结论正确的是

- A. 若  $a_1 = 1$ , 则  $a_2 = 2$   
B. 若  $p-t = s-q$ , 且  $p, q, s, t \in \mathbb{N}^*$ , 则  $a_p - a_t = a_s - a_q$   
C. 若  $a_1 = 2$ , 则  $a_{1024} = 1024$   
D. 若  $a_1 = 1$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

数学试题 第 2 页 (共 6 页)

11. 某书店为了解其受众人群,对 100 名顾客的年龄( $x$ )进行调研,并将所统计的数据制成如图所示的频率分布直方图.已知  $A, B, C, \dots, G$  是各个小矩形上短边的中点,若点  $A, B, C$  在一条直线上,点  $C, D, E, F, G$  在一条直线上,且  $c=0.024, g=0.0064$ ,则下列描述正确的是



- A.  $f$  的值为 0.0108  
 B. 数据  $x$  的众数大于中位数  
 C. 数据  $x$  的中位数小于平均数  
 D. 数据  $x$  的第 80 百分位数大于 60
12. 若函数  $f(x)$  满足:①  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 恒有  $f(x+2) = f(x-2)$ , ②  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 恒有  $f(2-x) = f(x)$ , ③  $x \in [-1, 1]$  时,  $f(x) = (x+1)^2 - 1$ , 则下列结论正确的是
- A.  $f(22) = 0$   
 B.  $|f(x_2) - f(x_1)|$  的最大值为 4  
 C.  $f(x)$  的单调递减区间为  $[2k+1, 2k+3], k \in \mathbf{Z}$   
 D. 若曲线  $y = k|x-1| - 1$  与  $f(x)$  的图象有 6 个不同的交点, 则实数  $k$  的取值范围为  $(\frac{1}{2}, 1)$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知向量  $\mathbf{a} = (-2, 1), \mathbf{b} = (m, 2)$ , 若  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ , 则实数  $m$  的一个可能取值为\_\_\_\_\_. (答案不唯一)
14. 对具有线性相关关系的变量  $x, y$ , 有一组观测数据  $(x_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 10)$ , 其经验回归方程为  $\hat{y} = -3.2x + \hat{a}$ , 且  $\bar{x} = 10, \bar{y} = 8$ , 则相应于点  $(9.5, 10)$  的残差为\_\_\_\_\_.
15. 若  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$  是函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + (a-1)x$  的两个极值点, 且  $f(x_1) + f(x_2) \geq -\frac{11}{2}$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
16. 在三棱锥  $P-ABC$  中, 平面  $PAB \perp$  平面  $ABC$ , 底面  $\triangle ABC$  是边长为 3 的正三角形, 若该三棱锥外接球的表面积为  $15\pi$ , 则该三棱锥体积的最大值为\_\_\_\_\_.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知函数  $f(x) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3}$ ,  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所

对的边分别为  $a, b, c$ ,  $f(A) = \sqrt{3}$ , 且  $\triangle ABC$  的外接圆的半径为  $\sqrt{3}$ .

(1) 求角  $A$  的大小;

(2) 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

一个不透明口袋里有大小、形状、质量完全相同的 10 个小球, 其中有 1 个红色球、2 个绿色球、3 个黑色球, 其余的是白色球, 采取放回式抽样法, 每次抽取前充分搅拌.

(1) 50 名学生先后各从口袋里随机抽取 1 个球, 设抽取到的球为黑色或红色的次数为  $X$ , 求  $X$  的数学期望;

(2) 甲、乙两人进行游戏比赛, 规定: 抽到红色球得 100 分, 抽到绿色球得 50 分, 抽到黑色球得 0 分, 抽到白色球得 -10 分. 两人各从口袋里抽取两次, 每次随机抽取一个球, 求甲的得分比乙的得分高, 且差值大于 100 分的概率.

19. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) 满足以下三个条件, 从中任选一个.

条件①:  $T_n$  为数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和,  $b_1 = 1, b_n \neq 0, b_n b_{n+1} = 2T_n$ , 且  $a_n = \frac{b_n}{2^n}$ ;

条件②: 数列  $\{b_n\}$  是首项为 1 的等比数列, 且  $b_1, 2b_2, 4b_3$  成等差数列; 数列  $\{c_n\}$  的各项均为正数,  $H_n$  为其前  $n$  项和, 且  $2H_n = c_n(c_n + 1)$ , 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = \frac{1}{2} b_n c_n$ ;

条件③: 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_{n+2} + b_n - 2b_{n+1} = 2^n, b_1 = 1, b_2 = 3$ , 且  $a_n = \frac{n}{b_n + 1}$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 证明:  $\frac{1}{2} \leq S_n < 2$ .

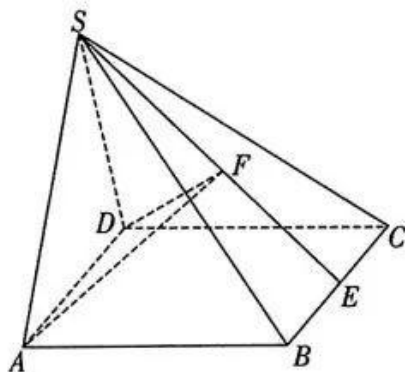
注: 若选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $S-ABCD$  中,  $\triangle SAD$  是等边三角形, 四边形  $ABCD$  是矩形, 平面  $SAD \perp$  平面  $ABCD$ , 且  $\sqrt{3}SA = 2AB$ ,  $E, F$  分别是  $BC, SE$  的中点.

(1) 证明:  $SE \perp$  平面  $ADF$ ;

(2) 求二面角  $A-SB-C$  的正弦值.



21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中, 已知  $F_1, F_2$  分别为椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点,  $M$  为椭圆  $C$  上的一个动点,  $\angle F_1MF_2$  的最大值为  $120^\circ$ , 且点  $M$  到右焦点  $F_2$  距离的最小值为  $2 - \sqrt{3}$ , 直线  $l$  交椭圆  $C$  于异于椭圆右顶点  $A$  的两个点  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 若以  $PQ$  为直径的圆恒过点  $A$ , 求证: 直线  $l$  恒过定点, 并求此定点的坐标.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x \ln x - x^2 + ax$ .

(1) 若  $f(x) \leq 0$ , 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $\left[\frac{1}{e}, b\right]$ , 且  $f(x)$  的极大值为  $M$ , 求证:

$$M \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

