

2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟试卷(一)

数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $M = \{a, 0\}$, $N = \{a^2, b\}$, 若 $M = N$, 则 $a + b =$
A. 0 B. 1 C. 2 D. -1
2. 在 $\triangle ABC$ 中, 记 $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, 若 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{CD} =$
A. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ B. $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$ C. $-\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ D. $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$
3. 若虚数 z 是关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0 (m \in \mathbb{R})$ 的一个根, 且 $|z| = \sqrt{2}$, 则 $m =$
A. 6 B. 4 C. 2 D. 1

4. 距今5000年以上的仰韶遗址表明,我们的先人们居住的是一种茅屋,如图1所示,该茅屋主体是一个正四棱锥,侧面是正三角形,且在茅屋的一侧建有一个入户甬道,甬道形似从一个直三棱柱上由茅屋一个侧面截取而得的几何体,一端与茅屋的这个侧面连在一起,另一端是一个等腰直角三角形。图2是该茅屋主体的直观图,其中正四棱锥的侧棱长为6m, $BC \parallel EF$, $AB = AC = 2\sqrt{2}$ m, $AB \perp AC$, 点D在正四棱锥的斜高PH上, $AD \perp$ 平面ABC且 $AD = 3\sqrt{2}$ m. 不考虑建筑材料的厚度,则这个茅屋(含甬道)的室内容积为



图1

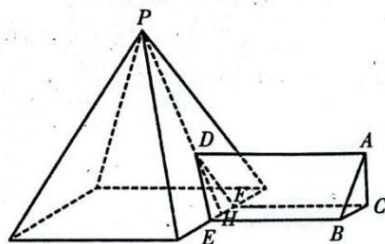


图2

- A. $\frac{137\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3$ B. $\frac{136\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3$ C. $\frac{134\sqrt{2}}{3} \text{ m}^3$ D. $44\sqrt{2} \text{ m}^3$
5. 已知 $\left(\frac{a}{x} + y\right)(x - 2y)^5$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为80, 则 a 的值为
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

数学试题卷 第1页(共4页)

6. 已知曲线 $C_1: y = a \sin(\pi x + \frac{\pi}{3})$, $C_2: y = a \cos(\pi x + \frac{\pi}{6})$, 其中 $a > 0$, 点 A, B, C 是曲线 C_1 与 C_2 依次相邻的三个交点. 若 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 则 $a =$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. 平行四边形 $ABCD$ 内接于椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 AB, AD 的倾斜角分别为 α, β , 若 $\alpha + \beta = 120^\circ$, 则 $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$

- A. $-\frac{3}{10}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{10}$

8. 若 $a = \sqrt{1.4} - 1$, $b = 2 \sin 0.1$, $c = \ln 1.21$, 则

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

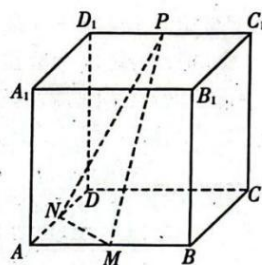
二、多项选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 已知一组不完全相同的数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}_0$, 方差为 s_0^2 , 中位数为 m_0 , 在这组数据中加入一个数 x_0 后得到一组新数据 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, 其平均数为 $\bar{x}$, 方差为 s^2 , 中位数为 m , 则下列判断一定正确的是

- A. $\bar{x}_0 = \bar{x}$ B. $s_0^2 = s^2$ C. $s_0^2 > s^2$ D. $m_0 > m$

10. 如图, 在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 AB, AD 的中点, P 为线段 C_1D_1 上的动点 (不含端点), 则下列结论中正确的是

- A. 三棱锥 $M-PNC$ 的体积为定值
B. 异面直线 BC 与 MP 所成的最大角为 45°
C. 不存在点 P 使得 $MN \perp NP$
D. 当点 P 为 C_1D_1 中点时, 过 M, N, P 三点的平面截正方体所得截面面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$



11. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = x$ 的焦点. 设 $P(x_0, y_0)$, ($x_0 > 0$) 是抛物线 C 上一个动点. P 在 C 的准线 l 上的射影为 M , M 关于点 P 的对称点为 N , 曲线 C 在 P 处的切线与准线 l 交于点 T , 直线 NF 交准线 l 于点 Q , 则

- A. $FM \perp FN$ B. $\triangle FTQ$ 是等腰三角形
C. PT 平分 $\angle FPM$ D. $|MQ|$ 的最小值为 2

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$, $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1+xy})$, 且 $f(\frac{1}{2}) = 1$. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 0$, 则

- A. $f(0) = 0$
B. $f(x)$ 是偶函数
C. $f(x)$ 为增函数
D. 当 $x_n > 0$, 且 $x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 + 1}$, $x_1 = \frac{1}{2}$ 时, $f(x_n) = 2^{n-1}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 为了比较甲、乙、丙、丁四组数据的线性相关性的强弱,小明分别计算了甲、乙、丙、丁四组数据的线性相关系数,其数值分别为 $-0.95, -0.87, 0.76, 0.92$, 则这四组数据中线性相关性最强的是_____组数据。

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=3$, 且 $a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n+1, & a_n \text{ 为奇数} \\ \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 若 $S_m=90$, 则 $m =$ _____。

15. 若直线 $y=kx-2$ 与曲线 $C_1: y=x^3$ 和圆 $C_2: (x-a)^2+y^2=10$ ($a>0$), 都相切, 则 a 的值为_____。

16. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, 已知平面 $SAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $AD=3$, $CD=2AB=2\sqrt{3}$, M 是平面 SAD 内的动点, 且直线 MB 与平面 SAD 所成的角和直线 MC 与平面 SAD 所成的角相等, 则当三棱锥 $M-BCD$ 的体积最大时, 三棱锥 $M-BCD$ 外接球的表面积为_____。

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分10分)

某工厂可以加工一种标准尺寸为50mm的零件, 目前的生产工艺生产该零件的尺寸(单位:mm)服从正态分布 $N(50, \sigma^2)$ ($\sigma>0$), 且尺寸不大于49.95mm的概率为0.02. 某客户向该厂预定1200个该种零件, 要求零件的尺寸误差小于0.05mm.

(1) 为完成订单且避免过度生产, 你认为该厂计划生产多少件零件最为合理?

(2) 实际投产时, 技术人员改进了该种零件的生产工艺. 改进后, 当生产了1225个零件时恰好完成订单. 请结合(1)的结果, 利用独立性检验判断能否有99%的把握认为生产工艺改进与生产零件的尺寸误差有关.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

18. (本题满分12分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 面积为 S , 满足 $4S=(a^2-3b^2)\sin C$.

(1) 证明: $\sin A=3\sin B$;

(2) 是否存在正整数 m, n , 使得 $c=mb$ 和 $\tan A=n\tan C$ 同时成立. 若存在, 求出 m, n 的值, 若不存在, 说明理由.

19.(本题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$, $a_1=2$, 且满足 $a_{n+1}+2a_n=2^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

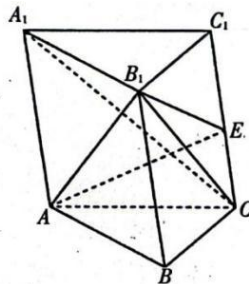
(2)设 $b_n = \sum_{i=1}^n (a_i^2 - a_i)$, 求数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 前 n 项的和 S_n .

20.(本题满分12分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $CA \perp CB$, 侧面 AA_1B_1B 为菱形, $\triangle AB_1C$ 为等边三角形.

(1)求证: $CB_1 \perp CB$;

(2)若 $CA=CB=4$, 点 E 是侧棱 CC_1 上的动点, 且平面 AB_1E 与平面 ABC 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{4}$, 求点 B 到平面 AB_1E 的距离.



21.(本题满分12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > 0$, $b > 0$) 的一条渐近线方程是 $x-2y=0$, 坐标原点到直线 AB 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 其中 $A(a, 0)$, $B(0, -b)$.

(1)求双曲线 C 的标准方程;

(2)过点 $D(2, 1)$ 直线 l 与双曲线 C 交于 M, N 两个不同的点, 过 M 作 x 轴的垂线分别交直线 AB , 直线 AN 于点 P, Q . 证明: P 是 MQ 的中点.

22.(本题满分12分)

已知函数 $f(x) = ax^2 - 2x \ln x - 2x$, ($a \in \mathbb{R}$).

(1)若 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2)存在正实数 a , 使得 $f(x) > e^{-x} - ax^2 - ex$ 成立 (e 为自然对数的底数), 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线