2023年“安徽省示范高中皖北协作区”第25届高三联考

数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid \ln(x-2)<0\}$，$B=\{x\mid 5-2x>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x\mid 2<x<\frac{5}{2}\}$　　B. $\{x\mid \frac{5}{2}<x<3\}$　　C. $\{x\mid 1<x<\frac{5}{2}\}$　　D. $\{x\mid 1<x<2\}$

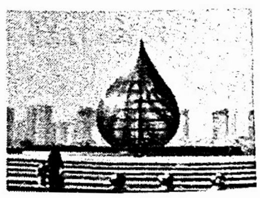
2. 已知复数 z 满足 $\frac{z}{z+1}=3+\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

3. 已知抛物线 $C: y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F，P 是抛物线 C 上的一点，且 $|PF|=3$，则点 P 到坐标原点 O 的距离是

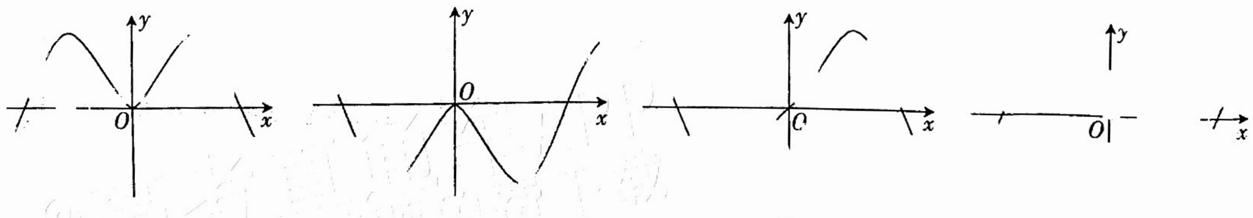
A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

4. 宿州市三角洲生态公园是多功能的综合性公园，其标志性雕塑“生命之源”为水滴形状，寓意水是生命之源，此雕塑顶部可视为一个圆锥. 已知此圆锥的高为3 m，其母线与底面所成的角为60°，则此圆锥的侧面展开图的面积为



A. $3\pi\ \mathrm{m}^2$　　B. $6\pi\ \mathrm{m}^2$　　C. $3\sqrt{3}\pi\ \mathrm{m}^2$　　D. $6\sqrt{3}\pi\ \mathrm{m}^2$

5. 函数 $f(x)=\frac{2(x^2+1)\sin x}{2^x+2^{-x}}$ 的部分图象大致是



A　　B　　C　　D

6. 公元前3世纪，古希腊数学家阿波罗尼斯结合前人的研究成果，写出了经典之作《圆锥曲线论》，在此著作第七卷《平面轨迹》中，有众多关于平面轨迹的问题，例如：平面内到两定点距离之比等于定值(不为1)的动点轨迹为圆. 后来该轨迹被人们称为阿波罗尼斯圆. 已知平面内有两点 $A(-1,0)$ 和 $B(2,1)$，且该平面内的点 P 满足 $|PA|=\sqrt{2}|PB|$，若点 P 的轨迹关于直

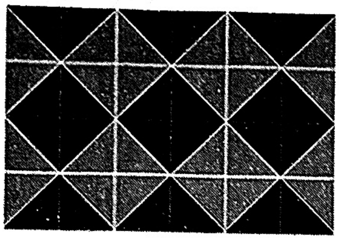
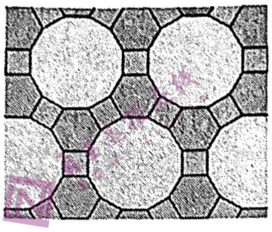
线$mx+ny-2=0(m>0,n>0)$对称，则$\frac{2}{m}+\frac{3}{n}-15$的最小值是

A. $10+2\sqrt{5}$　　B. $10+2\sqrt{15}$　　C. $-5+2\sqrt{10}$　　D. $-7+2\sqrt{15}$

7. 已知$a=\ln\frac{5}{4}$，$b=\frac{1}{5}$，$c=\sqrt[4]{e}-1$(其中e=2.71828…是自然对数的底数)，则下列大小关系正确的是

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $a<c<b$　　D. $c<a<b$

8. 许多建筑物的地板是用正多边形的地砖铺设而成的(可以使用多种正多边形的地砖). 用正多边形地砖可以铺出很多精美的图案，如图. 若用边长相等的正多边形地砖铺满地面，且保持每块地砖完整不受损坏，则至少使拼接在同一顶点处的所有正多边形地砖的内角和恰为2π. 现用正多边形地砖给一个地面面积较大的客厅铺设地板(所有类型地砖边长均相等)，要求每块地砖完整不受损坏，铺设地砖后无空余地面(不考虑客厅墙角和周边地带)，每个顶点周围只有3块正多边形地砖拼接在一起，则在某一顶点处的拼法(不考虑排列顺序)最多有

A. 16种　　B. 10种　　C. 4种　　D. 5种

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 下列说法正确的是

A. 数据5,7,8,11,10,15,20的中位数为11

B. 一组数据7,8,8,9,11,13,15,17,20,22的第80百分位数为18.5

C. 从1,2,3,4,5中任取3个不同的数，则这3个数能构成直角三角形三边长的概率为0.1

D. 设随机事件A和B，已知$P(A)=0.8$，$P(B|A)=0.6$，$P(B|\overline{A})=0.1$，则$P(B)=0.5$

10. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=ba_n+a(a,b\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}_+)$，则下列结论正确的是

A. 若$a=0,b=2$，则$S_n=2^n-1$　　B. 若$a=2,b=1$，则$S_n=n^2-2n$

C. 若$a=1,b=-1$，则$a_{10}=1$　　D. 若$a=1,b=2$，则$a_n=2^n-1$

11. 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cos x$，则下列结论正确的是

A. $f(x)$的图象关于点$(\frac{\pi}{2},0)$对称　　B. $f(x)$在区间$(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$上单调递增

C. $f(x)$在区间$[1,10]$内有7个零点　　D. $f(x)$的最大值为$\frac{2\sqrt{3}}{9}$

12. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x+3)+f(x+1)=f(2)$，$f(2-x)=f(x+4)$，若$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，则

A. $f(x)$是周期函数　　B. $f(2022)=\frac{1}{2}$

C. $f(x)$的图象关于$x=1$对称　　D. $\sum_{k=1}^{200}kf(k-\frac{1}{2})=-100$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 (,) .

14. $(\frac{y}{x}-1)(x+y)^7$ 的展开式中 x^4y^3 的系数为 14▲ .（用数字作答）

15. 已知正四棱台 $A'B'C'D'-ABCD$ 内接于半径为 1 的球 O，且球心 O 是四边形 $ABCD$ 的中心，若该棱台的侧棱与底面 $ABCD$ 所成的角是 $60°$，则该棱台的体积为 ▲ .

16. 已知 F 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点，过 F 作 C 的一条渐近线的垂线 l，垂足为 M，直线 l 与另一条渐近线交于点 N，若 $|MN|=4\sqrt{3}a$，则双曲线 C 的离心率为 ▲ .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 各项都为正数，且 $a_n^2-na_na_{n-1}+a_n-na_{n-1}=0(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$，$a_1=1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=\frac{n}{a_{n+1}}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$\frac{1}{2}\leqslant S_n<1$.

18.（12 分）

为贯彻落实《健康中国行动（2019—2030 年）》《关于全面加强和改进新时代学校体育工作的意见》等文件精神，确保 2030 年学生体质达到规定要求，各地将认真做好学生的体制健康监测. 某市决定对某中学学生的身体健康状况进行调查，现从该校抽取 200 名学生测量他们的体重，得到如下样本数据的频率分布直方图.

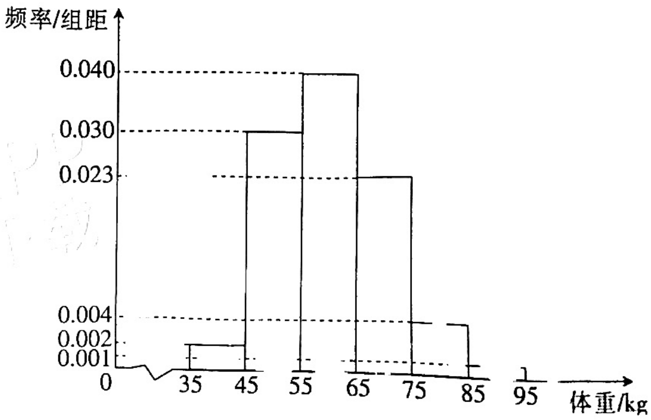
(1) 求这 200 名学生体重的平均数 $\bar{x}$ 和方差 s^2（同一组数据用该区间的中点值作代表）.

(2) 由频率分布直方图可知，该校学生的体重 Z 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 近似为平均数 $\bar{x}$，σ^2 近似为方差 s^2.

①利用该正态分布，求 $P(50.73<Z\leqslant 69.27)$；

②若从该校随机抽取 50 名学生，记 X 表示这 50 名学生的体重位于区间 $(50.73,69.27]$ 内的人数，利用①的结果，求 $E(X)$.

参考数据：$\sqrt{86}\approx 9.27$. 若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z\leqslant\mu+\sigma)\approx 0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0.9544$，$P(\mu-3\sigma<Z\leqslant\mu+3\sigma)\approx 0.9974$.



19.(12 分)

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$a=2\sqrt{2}$，$\sqrt{2}c\sin(A+\frac{\pi}{4})=b$.

(1)求角C；

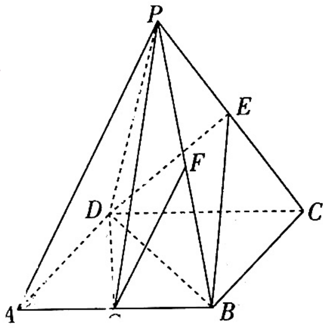
(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，D为AB边的中点，求线段CD长的取值范围.

20.(12 分)

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，所有棱长都相等，$AB\perp AD$，E,F分别是棱PC,PB的中点，G是棱AB上的动点，且$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

(1)若$\lambda=\frac{1}{2}$，证明：$GF//$平面BDE.

(2)求平面BDE与平面PDG夹角余弦值的最大值.



21.(12 分)

已知A,B分别是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的左、右顶点，若椭圆$C$的短轴长等于焦距，且该椭圆经过点$(-\sqrt{2},1)$.

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)过椭圆C的右焦点F作一条直线交椭圆C于M,N(异于A,B两点)两点，连接AM,AN并延长，分别交直线$l:x=2\sqrt{2}$于不同的两点P,Q.证明：直线MQ与直线NP相交于点B.

22.(12 分)

已知函数$f(x)=ax^2+x-e^x+1$，其中$a\in\mathbf{R}$，$e=2.71828\cdots$是自然对数的底数.

(1)若$a=\frac{1}{2}$，证明：当$x<0$时，$f(x)>0$；当$x>0$时，$f(x)<0$.

(2)设函数$g(x)=\cos x-f(x)+1$，若$x=0$是$g(x)$的极大值点，求实数a的取值范围.

(参考数据：$e^{-\frac{\pi}{6}}\approx0.59$，$e^{-\frac{\pi}{4}}\approx0.46$)