2023年普通高等学校招生全国统一考试压轴卷(T8联盟)

数学试题(一)

命题学校:华师一附中

试卷满分:150分　　　　考试用时:120分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 纯洁的冰雪,激情的约会.2030年冬奥会预计在印度孟买举行.按常理,该次冬奥会共有7个大项,如冰球、冰壶、滑冰、滑雪、雪车等;一个大项又包含多个小项,如滑冰又分为花样滑冰、短道速滑、速度滑冰三个小项.若集合U代表所有项目的集合,一个大项看作是几个小项组成的集合,其中集合A为滑冰三个小项构成的集合,下列说法不正确的是

A. “短道速滑”不属于集合A相对于全集U的补集

B. “雪车”与“滑雪”交集为空集

C. “速度滑冰”与“冰壶”交集不为空集

D. 集合U包含“滑冰”

2. 若复数z满足$z(1+i)^2=1-i$,则$\bar{z}$的虚部为

A. $-\frac{1}{2}i$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}i$　　D. $\frac{1}{2}$

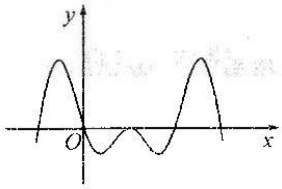
3. 已知函数$f(x)=|\sin \pi x|$,$g(x)=\sin \frac{\pi}{2}x$,若函数$\varphi(x)=f(x)$,$x\in\{x|f(x)\neq g(x)\}$,则$\varphi(x)$的最小正周期为

A. π　　B. 2　　C. 4　　D. 4π

4. 设 F_1，A 分别是椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 的左焦点和右顶点，点 P 为椭圆上异于 A 点的任意一点，则使得$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0$ 成立的点 P 的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 已知函数 $f(x)$的部分图象如图所示，则 $f(x)$的解析式可能为



A. $f(x)=-x\cos \pi x$　　B. $f(x)=(x-1)\sin \pi x$

C. $f(x)=x\cos[\pi(x+1)]$　　D. $f(x)=(x-1)\cos \pi x$

6. 已知正数 a,b,c 满足$2\ 022^a=2\ 023$，$2\ 023^b=2\ 022$，$c=\ln 2$，下列说法正确的是

A. $\log_a c>\log_b c$　　B. $\log_c a>\log_c b$　　C. $a^c<b^c$　　D. $c^a<c^b$

7. 已知抛物线 C_1：$y=x^2+2x$ 和 C_2：$y=-x^2+a$，若 C_1 和 C_2 有且仅有两条公切线 l_1 和 l_2，l_1 和 C_1、C_2 分别相切于 M,N 点，l_2 与 C_1、C_2 分别相切于 P,Q 两点，则线段 PQ 与 MN

A. 总是互相垂直　　B. 总是互相平分

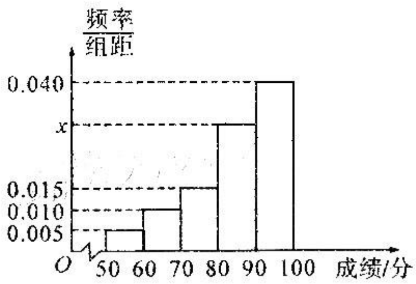
C. 总是互相垂直且平分　　D. 上述说法均不正确

8. 在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp AC$，且 $AB=AC$，$AD=\sqrt{2}CD=2\sqrt{2}$，则 BD 的最大值为

A. $2\sqrt{7}$　　B. 6　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 某校组织全体学生参加了“喜迎二十大，结合中华传统文化与楚文化的创新突破”的剧本创作大赛，随机抽取了 400 名学生进行成绩统计，发现抽取的学生的成绩都在 50 分至 100 分之间，进行适当分组后(每组的取值区间均为左闭右开)，画出频率分布直方图(如图)，下列说法正确的是



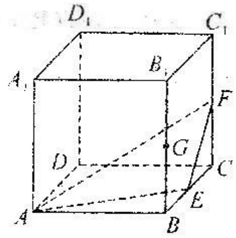
A. 在被抽取的学生中，成绩在区间$[90,100)$内的学生有 160 人

B. 图中 x 的值为 0.020

C. 估计全校学生成绩的平均分约为 83

D. 估计全校学生成绩的 80%分位数为 95

10. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E,F,G 分别为棱 BC,CC_1,BB_1 的中点，则下列结论正确的是



A. 直线 EF 到平面 A_1ADD_1 的距离为 2

B. 直线 AE 与直线 C_1G 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. 点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离之比为 $1:2$

D. 平面 AEF 截正方体所得截面面积为 $\frac{9}{2}$

11. 已知实数 a,b，则下面说法正确的是

A. 若 $a>b$，则 $a^3|a|>b^3|b|$

B. 若 a,b 均大于 0 且 $b\ln a=a\ln b$，则 $a>b$

C. 若 $a>0,b>0,a+b=2$，则 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}$ 最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

D. 若 $a^2+b^2=1$，则 ab 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

12. 已知集合 $A=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x|x=2^n,n\in\mathbf{N}^*\}$，集合 $C=A\cup B$，将集合 C 中所有元素从小到大依次排列为一个数列 $\{a_n\}$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则

A. $S_8=39$

B. $a_{n+2}-a_{n+1}=1$ 或 2

C. $S_{2^{n-1}+n}=2^{2n-2}+2^{n+1}-2$

D. 若存在 $n\in\mathbf{N}^*$ 使 $S_n>12a_{n+1}$，则 n 的最小值为 26

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中的常数项为________.

14. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在不同的两点，使函数图象在这两点处的切线斜率之积小于 0 且斜率之和等于常数 e，则称该函数为“e 函数”，下列四个函数中，其中为“e 函数”的是________.

①$y=\frac{\ln x}{x}$；②$y=\begin{cases}-x,x\leqslant 0\\(\mathrm{e}+1+x)x,x>0\end{cases}$；③$y=x^2+2x$；④$y=\left|\frac{1}{x}\right|$

15. 已知有 L,M,S 三种尺寸的检测样品盒，其中每个 L 盒至多放置 10 支完全相同的样品，且 L 盒至少比 M 盒多 2 支样品，M 盒至少比 S 盒多 2 只样品，则不同的放置方法共有________种.（注：L,M,S 不可为空盒）

16. 已知直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A,B 两点（与坐标原点 O 均不重合），且 $OA\perp OB$，抛物线的焦点为 F，记△AOB、△AOF、△BOF 的面积分别为 S_1,S_2,S_3，若满足 $S_1=6S_2+3S_3$，则直线 l 的方程为________________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知△ABC 中，角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c，若满足 $a(\sin 2A-\cos B\cos C)+b\sin A\sin C=0$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=2$，求△ABC 面积的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $2S_n=n(n+a_1-1)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

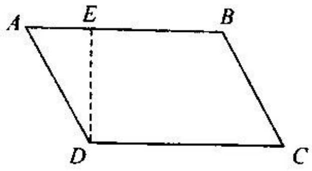
(2)令 $b_n=a_n\cdot 2^{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

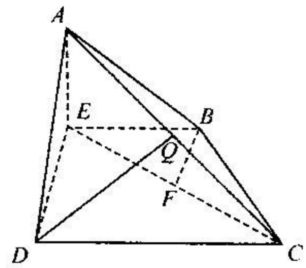
19.(本小题满分 12 分)

在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=3\sqrt{2}$,$BC=2\sqrt{2}$,$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$,过 D 点作 $DE\perp AB$ 于 E,以 DE 为轴,将$\triangle ADE$ 向上翻折使平面 $ADE\perp$ 平面 $BCDE$,连接 CE,F 点为线段 CE 的中点,Q 为线段 AC 上一点.

(1)证明:$BF\perp AC$;

(2)若二面角 A-DQ-E 的余弦值为$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$,求$\frac{CQ}{CA}$的值.





20.(本小题满分 12 分)

长江十年禁渔计划全面施行,渔民老张积极配合政府工作,如期收到政府的补偿款.他决定拿出其中 10 万元进行投资,并看中了两种为期 60 天(视作 2 个月)的稳健型(不会亏损)理财方案.

方案一:年化率 2.4%,且有 10%的可能只收回本金;

方案二:年化率 3.0%,且有 20%的可能只收回本金;

已知老张对每期的投资本金固定(都为 10 万元),且第一次投资时选择了方案一,在每期结束后,老张不间断地进行下一期投资,并且他有 40%的可能选择另一种理财方案进行投资.

(1)设第 i 次投资($i=1,2,3,\cdots n$)选择方案一的概率为 P_i,求 P_4;

(2)求一年后老张可获得总利润的期望(精确到 1 元).

[注:若拿 1 千元进行 5 个月年化率为 2.4%的投资,则该次投资获利 $\omega=2.4\%\times\frac{5}{12}\times 1\,000=10$ 元]

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,四点 $P_1(-2,1)$,$P_2(0,\sqrt{2})$,$P_3(2,1)$,$P_4(3,1)$中恰有三点在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)椭圆 C 上是否存在异于 P_2 的两点 M,N 使得直线 P_2M 与 P_2N 的斜率之和与直线 MN 的斜率(不为零)的 2 倍互为相反数?若存在,请判断直线 MN 是否过定点;若不存在,请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知 $f(x)=2x-\sin x-\sqrt{a}\ln x$.

(1)当 $a=1$ 时,讨论函数 $f(x)$ 的极值点个数;

(2)若存在 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$,使 $f(x_1)=f(x_2)$,求证:$x_1x_2<a$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。