2023届高三“一起考”大联考(模拟三)·数学

双向细目表

题序	知识内容(考点)	难度系数	分值
1	集合及其运算	0.8	5
2	复数的运算	0.8	5
3	一元线性回归模型	0.8	5
4	平面向量的运算	0.7	5
5	同角三角函数的基本关系	0.7	5
6	数列的性质	0.7	5
7	函数与不等式	0.3	5
8	空间几何体的体积计算	0.3	5
9	立体几何中线面的位置关系	0.8	5
10	基本不等式	0.7	5
11	圆锥曲线的基本性质	0.6	5
12	函数与导数	0.3	5
13	二项式定理	0.8	5
14	函数的性质	0.6	5
15	直线与圆的位置关系	0.5	5
16	数列的基本性质	0.4	5
17	等比数列的基本性质	0.8	10
18	解三角形	0.7	12
19	立体几何	0.7	12
20	概率与统计	0.6	12
21	圆锥曲线	0.6	12
22	函数与导数	0.4	12

参考答案

1. B　解析：由集合 $A=\{x\mid 2^x<1\}=\{x\mid x<0\}$，$B=\{x\mid x-2<0\}=\{x\mid x<2\}$，

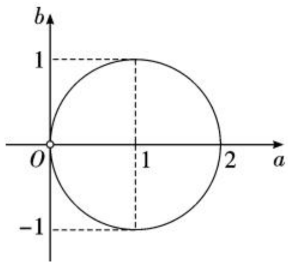
则 $(\complement_U A)\cup B=\{x\mid x\geqslant 0\}\cup\{x\mid x<2\}=\mathbf{R}$. 故选 B. 无界学习公众号

2. C　解析：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{Z})$，则 $|z-1|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$，所以 $(a-1)^2+b^2\leqslant 1$.

(方法一)因为 $(a-1)^2\geqslant 0$，所以 $b^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant b\leqslant 1$.

当 $b=\pm 1$ 时，$a-1=0$，即 $a=1$，有两组满足条件 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

当 $b=0$ 时，$a-1=0$ 或 $a-1=\pm 1$，所以 $\begin{cases}a=1,\\b=0,\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,\\b=0,\end{cases}$ $\begin{cases}a=0,\\b=0,\end{cases}$ 但 $a=0,b=0$ 时，$z=0$，不符合题意，故选 C.



(方法二)如图，可转化为研究圆面 $(a-1)^2+b^2\leqslant 1$ 内(包括边界)的整点个数. 圆面包括的整点分别为 $(0,0)$，$(1,0)$，$(2,0)$，$(1,1)$，$(1,-1)$，而 $(0,0)$ 不满足 $z\neq 0$，则符合题意的整点共有 4 个.

故选 C.

3. B　解析：根据一元线性回归模型中对随机误差 e 的假定，残差应是均值为 0，方差为 σ^2 的随机变量的观测值.

对于 A，残差的方差不是一个常数，随着观测时间变大而变大，故 A 错误；

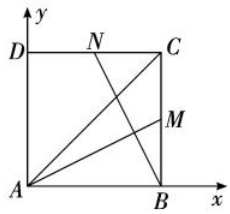
对于 B，残差比较均匀地分布在以取值为 0 的横轴为对称轴的水平带状区域内，故 B 正确；

对于 C，残差与观测时间有线性关系，故 C 错误；

对于 D，残差与观测时间有非线性关系，故 D 错误.

故选 B.

4. B　解析：以 AB，AD 分别为 x 轴、y 轴，建立平面直角坐标系，如图.



设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，因为 M，N 分别是 BC，CD 的中点，

所以 $\overrightarrow{AM}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{BN}=\left(-\frac{1}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1)$.

因为 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BN}$，所以 $\begin{cases}\lambda-\frac{1}{2}\mu=1,\\\frac{1}{2}\lambda+\mu=1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\lambda=\frac{6}{5},\\\mu=\frac{2}{5},\end{cases}$

所以 $\lambda+\mu=\frac{8}{5}$. 故选 B.

5. C　解析：由 $3\cos 2\alpha+4\cos\alpha+1=0$，可得 $3(2\cos^2\alpha-1)+4\cos\alpha+1=0$，

可得 $3\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$，解得 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$或-1.

又 $\alpha\in(-\pi,0)$，所以 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，可得 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2\sqrt{2}$. 故选 C.无界学习公众号

6. D　解析：$n=1$ 时，$T_1=2$，

由 $T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$ 易得 $a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}(n\geqslant 2)$，代入$\frac{1}{T_n}+\frac{1}{a_n}=1$，得 $T_n-T_{n-1}=1$，

则$\{T_n\}$是首项为 2，公差为 1 的等差数列，所以 $T_n=n+1$，$T_{10}=11$，故选 D.

7. A　解析：$\log_3 2<\log_3 3^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}=\log_5 5^{\frac{2}{3}}<\log_5 3$，所以 $a<b$.

$\ln 3\ln 8<(\frac{\ln 3+\ln 8}{2})^2<(\ln 5)^2$，$\frac{\ln 3}{\ln 5}<\frac{\ln 5}{\ln 8}$，$\log_5 3<\log_8 5$，$b<c$，所以 $a<b<c$. 故选 A.

8. A　解析：设水杯下底面面积为 S，则由圆台体积公式有 $V=\frac{1}{3}\times 20\times(S+30+\sqrt{30S})=500$，从而 $S+\sqrt{30S}=45(*)$，$30S=(45-S)^2$，化简得到$(60-S)^2\approx 1600$，故 $S\approx 20$ 或 100 (100 不符合(*)式，舍去). 因为积水深度只有 2 厘米，远低于水杯的高度，水杯上下底面半径的差距又非常小，故积水体积可以近似为圆柱体的体积，为 $20\times 2=40$ 毫升. 这些水是水杯敞口(地表 30 平方厘米区域)一天内接到水的量，根据日降雨量的定义，有当天日降雨量估计值为$\frac{40}{30}\times 10\approx 13.3(\text{mm})$，故选 A.

9. AC　解析：若 $a\perp\alpha$，$a\perp\beta$，则由直线与平面垂直的性质可得 $\alpha/\!/\beta$，故 A 正确.
若 $a\perp\beta$，$a/\!/b$，则 $b\perp\beta$，故 b 与 β 有交点，$b/\!/\beta$ 错误，故 B 错误.
若 $b\perp\alpha$，则 b 垂直平面 α 内的两条相交直线 m 与 n，又 $a/\!/b$，则 $a\perp m$，$a\perp n$，则 $a\perp\alpha$，故 C 正确.
若 $a/\!/\alpha$，$b\subset\alpha$，则 $a/\!/b$ 或 a 与 b 异面，故 D 错误. 故选 AC.

10. ABD　解析：对于 A，$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{2}{n})=\frac{1}{2}(3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n})\geqslant\frac{1}{2}(3+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{2m}{n}})=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当$\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}$时，等号成立，故 A 正确.

对于 B，$\sqrt{mn}\leqslant\frac{m+n}{2}=1$，当且仅当 $m=n=1$ 时，等号成立，则$\frac{\sqrt{mn}}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，故 B 正确.

对于 C，$\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2}\leqslant\sqrt{\frac{m+n}{2}}=1$，即 $\sqrt{m}+\sqrt{n}\leqslant 2$，当且仅当 $m=n=1$ 时，等号成立，故 C 错误.

对于 D，$m^2+n^2\geqslant\frac{(m+n)^2}{2}=2$，当且仅当 $m=n=1$ 时，等号成立，故 D 正确.

故选 ABD.

11. ACD　解析：根据题意 $a^2+2b^2-1=0$ 或 $-a^2+2b^2-1=0$，前者在 Oxy 平面内体现为 $x^2+2y^2=1(x\neq 0)$，表示离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的椭圆，后者体现为 $2y^2-x^2=1(x\neq 0)$，表示离心率为$\sqrt{3}$的双曲线，故 A 正确，B 错误. 直线 $y=x$ 的斜率为 1，双曲线渐近线的斜率为$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故直线 $y=x$ 和双曲线有两个交点，显然它与椭圆 $x^2+2y^2=1$ 有两个交点，故 C 正确. 而圆 $x^2+y^2=1$ 与椭圆交点为椭圆的左右顶点，圆的半径大于双曲线实轴长度的一半，故圆和双曲线有四个交点，D 正确，故选 ACD.

12. ABD　解析：对于 A，当 $x>0$ 时，$e^x>1$，令 $t=e^x$，则 $t>1$，$g(t)=t-\ln t$，

因为 $g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$，所以当 $t>1$ 时，$g'(t)>0$ 恒成立，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $t=e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以根据复合函数的单调性可知 $g(e^x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，A 正确. 无界学习公众号

对于 B，当 $x>1$ 时，$\ln x^2>\ln 1=0$，又 a 为正实数，所以 $ax>a>0$，

$f'(x)=e^x-1$，所以当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则由 $f(ax)\geqslant f(\ln x^2)$ 得 $ax\geqslant\ln x^2$，则 $a\geqslant\frac{2\ln x}{x}$.

令 $h(x)=\frac{2\ln x}{x}(x>1)$，则 $h'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$，

当 $x\in(1,e)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{2}{e}$，

所以 $a\geqslant\frac{2}{e}$，则正实数 a 的最小值为$\frac{2}{e}$，B 正确.

对于 C，$f'(x)=e^x-1$，所以当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=1$，则 $t>1$；

不妨设 $x_1<x_2$，则必有 $x_1<0<x_2$.

若 $x_1+x_2>0$，则 $x_2>-x_1>0$，等价于 $f(x_2)>f(-x_1)$，

又 $f(x_2)=f(x_1)$，则等价于 $f(x_1)>f(-x_1)$，

令 $F(x)=f(x)-f(-x)(x<0)$，则 $F'(x)=e^x+e^{-x}-2$，

因为 $x<0$，所以 $0<e^x<1$，$e^{-x}>1$，所以 $e^x+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，

因为 $x<0$，所以 $e^x+e^{-x}>2$，则 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $F(x)<F(0)=0$，即 $f(x)<f(-x)$，

所以 $f(x_1)<f(-x_1)$，可知 $x_1+x_2>0$ 不成立，C 错误；

对于 D，由 $f(x_1)=g(x_2)=t(t>2)$，$x_2>x_1>0$，得 $e^{x_1}-x_1=x_2-\ln x_2=e^{\ln x_2}-\ln x_2=t(t>2)$，即 $f(x_1)=f(\ln x_2)=t(t>2)$，

由 C 知，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(1)=e-1<2$，

所以 $x_1>1$，则 $x_2>x_1>1$，所以 $\ln x_2>0$.

所以 $x_1=\ln x_2$，即 $e^{x_1}=x_2$，所以 $\dfrac{\ln t}{x_2-x_1}=\dfrac{\ln t}{e^{x_1}-x_1}=\dfrac{\ln t}{f(x_1)}=\dfrac{\ln t}{t}$.

令 $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}(t>2)$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，无界学习公众号

所以当 $t\in(2,e)$ 时，$\varphi'(t)>0$；当 $t\in(e,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)<0$.

所以 $\varphi(t)$ 在 $(2,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$，即 $\dfrac{\ln t}{x_2-x_1}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{e}$，D 正确. 故选 ABD.

13. $\dfrac{63\sqrt{2}}{2}$　解析：原式 $=\left(\dfrac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{2x}\right)^5=\dfrac{1}{32x^5}\cdot[(x+\sqrt{2})^2]^5=\dfrac{1}{32x^5}\cdot(x+\sqrt{2})^{10}$，

所以求原式的展开式中的常数项可转化为求 $(x+\sqrt{2})^{10}$ 的展开式中含 x^5 项的系数的 $\dfrac{1}{32}$，

即所求的常数项为 $\dfrac{C_{10}^5\cdot(\sqrt{2})^5}{32}=\dfrac{63\sqrt{2}}{2}$.

14. 4　解析：$f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+4x^2}-2x)+2+\ln(\sqrt{1+4(-x)^2}+2x)+2$

$$=\ln(\sqrt{1+4x^2}-2x)+\ln(\sqrt{1+4x^2}+2x)+4$$

$$=\ln[(\sqrt{1+4x^2}-2x)(\sqrt{1+4x^2}+2x)]+4$$

$$=\ln(1+4x^2-4x^2)+4=\ln 1+4=4.$$

因为 $\lg 5+\lg\dfrac{1}{5}=0$，所以 $f(\lg 5)+f(\lg\dfrac{1}{5})=f(\lg 5)+f(-\lg 5)=4$.

15. $3\sqrt{2}$　解析：因为数列$\{a_n\}$是等差数列，所以直线 l 过定点$D(1,-2)$．点 C 在以 AD 为直径的圆上运动，AD 的中点为$E(0,-1)$，该圆的方程为 $x^2+(y+1)^2=2$，所以 BC 的最大值为$|BE|+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$．

16. $[\frac{7}{2},+\infty)$　解析：由 $a_{n+1}^2+a_n^2+1=2(a_{n+1}a_n-a_{n+1}+a_n)$，

得 $a_{n+1}^2+a_n^2=2a_{n+1}a_n-2a_{n+1}+2a_n-1$，

即 $a_{n+1}^2+a_n^2-2a_{n+1}a_n+2a_{n+1}-2a_n+1=0$，即$(a_{n+1}-a_n)^2+2(a_{n+1}-a_n)+1=0$，

于是有$(a_{n+1}-a_n+1)^2=0$，所以 $a_{n+1}-a_n+1=0$，即 $a_{n+1}-a_n=-1$，

所以$\{a_n\}$是首项为 a_1，公差为-1 的等差数列，所以 $a_n=a_1+(n-1)\times(-1)=a_1-n+1$．

由 $a_{k+1}+(2t+1)a_k=0$，得 $a_k-1+(2t+1)a_k=0$，所以 $a_k=\frac{1}{2t+2}$，即 $a_1-k+1=\frac{1}{2t+2}$．

又因为$\frac{1}{2t+2}\in(0,\frac{1}{2})$，所以$\exists a_1\in(3,\lambda)$使得$(0,\frac{1}{2})$包含于 a_1-k+1 的取值范围．

当 $k=1$ 时，$a_1-k+1\in(3,\lambda)$，不满足题意；

当 $k=2$ 时，$a_1-k+1\in(2,\lambda-1)$，不满足题意；

当 $k=3$ 时，$a_1-k+1\in(1,\lambda-2)$，不满足题意；

当 $k=4$ 时，$a_1-k+1\in(0,\lambda-3)$，所以 $\lambda-3\geqslant\frac{1}{2}$，即 $\lambda\geqslant\frac{7}{2}$；

当 $k\geqslant5$ 时，λ 的取值均大于$\frac{7}{2}$，所以 $\lambda\geqslant\frac{7}{2}$．

17. 解析：(1)因为$\{a_n\}$是公比 $q>1$ 的等比数列，

所以由$\begin{cases}S_3=13,\\a_4^2=3a_6,\end{cases}$得$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=13,\\a_2a_6=3a_6,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=13,\\a_2=3,\end{cases}$则$\begin{cases}a_1+a_3=10,\\a_2^2=9,\end{cases}$ ……… (1 分)

故$\begin{cases}a_1+a_3=10,\\a_1a_3=9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\a_3=9,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=9,\\a_3=1\end{cases}$(舍去)， ……………………………………… (3 分)

故 $q^2=\frac{a_3}{a_1}=9$，则 $q=3$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$． ……………………………………… (5 分)

(2)当 n 为奇数时，$b_n=a_n=3^{n-1}$，

当 n 为偶数时，$b_n=b_{n-1}+n=3^{n-2}+n$， ……………………………………… (6 分)

所以 $S_{2n}=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}$

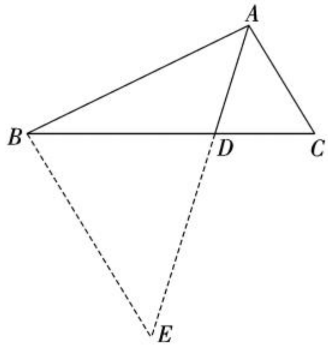
$=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})$

$=(3^0+3^2+\cdots+3^{2n-2})+(3^0+2+3^2+4+\cdots+3^{2n-2}+2n)$

$=2(3^0+3^2+\cdots+3^{2n-2})+(2+4+\cdots+2n)$

$=2\times\frac{1-(3^2)^n}{1-3^2}+\frac{n(2n+2)}{2}=\frac{9^n-1}{4}+n(n+1)$． ……………………………… (10 分)

18. 解析：(1)过 B 作直线 $BE\parallel AC$，交 AD 延长线于 E，如图右.



所以 $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=2$，

所以 $\frac{DE}{AD}=\frac{BE}{AC}=\frac{BD}{DC}=2$，

即 $BE=2AC, AE=3AD$. ································ (2 分)

在 $\triangle ABE$ 中，由余弦定理，有

$AE^2=AB^2+BE^2-2AB\cdot BE\cdot\cos\angle EBA$，

即 $(3AD)^2=(2AC)^2+(2AC)^2+2(2AC\cdot 2AC)\cdot\cos\angle BAC$，

所以 $9(kAC)^2=8AC^2+8AC^2\cdot\cos\angle BAC$，

即 $k^2=\frac{8}{9}(1+\cos\angle BAC)\in(0,\frac{16}{9})$，所以 $0<k<\frac{4}{3}$. ································ (5 分)

(2)因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=AC^2\sin A=1$.

在 $\triangle ABC$ 中，有 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=5AC^2-4AC^2\cos A=\frac{5-4\cos A}{\sin A}$.

·· (8 分)

记 $y=\frac{5-4\cos A}{\sin A}$，则 $y\sin A+4\cos A=5$，$\sqrt{y^2+4^2}\sin(A+\varphi)=5$，

当 $\sin(A+\varphi)=1$ 时，$\sqrt{y^2+4^2}=5\Rightarrow y=3$，此时 y 有最小值，$\cos A=\frac{4}{5}$，············ (10 分)

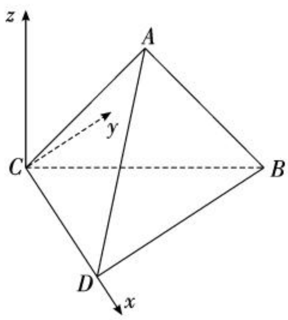
故当 $k=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 时，BC 取最小值 $\sqrt{3}$. ·· (12 分)

19. 解析：(1)由几何关系得 $BD=\sqrt{3}CD, BC=2CD, AC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\sqrt{2}CD$，

记三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的高为 h，由 $V_{B\text{-}ACD}=V_{A\text{-}BCD}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\times 3=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot h$，

则 $3\times\frac{1}{2}AC\cdot CD=\frac{1}{2}BD\cdot CD\cdot h$，故 $h=\sqrt{6}$. ·· (5 分)

(2)如图，以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CD}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{DB}$ 为 y 轴正方向，垂直于 $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{DB}$ 向上的方向为 z 轴正方向建立空间直角坐标系 $Cxyz$，设 $CD=a$，则 $D(a,0,0)$，$B(a,\sqrt{3}a,0)$.



因为 $CD\perp AC$，故 A 在平面 Cyz 内，设 $A(0,y_0,z_0)$，

因为 $|AC|=|AB|=\sqrt{2}a$，

所以 $y_0^2+z_0^2=a^2+(\sqrt{3}a-y_0)^2+z_0^2=2a^2$，

解得 $y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}a, z_0=\frac{\sqrt{6}}{3}a, A(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{6}}{3}a)$. …………………………………………… (7 分)

设平面 ACD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，无界学习公众号

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}ax_1=0,\\ \frac{2\sqrt{3}}{3}ay_1+\frac{\sqrt{6}}{3}az_1=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(0,-1,\sqrt{2})$. ……………………… (10 分)

记 AB 与平面 ACD 所成的角为 θ，$\overrightarrow{AB}=(a,\frac{\sqrt{3}}{3}a,-\frac{\sqrt{6}}{3}a)$.

$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………… (11 分)

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，故 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 所以 AB 与平面 ACD 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$. ………………… (12 分)

20. 解析：(1)由题意可知，$\xi=0,1,2$，…………………………………………………… (1 分)

$P(\xi=0)=\frac{C_{43}^2}{C_{50}^2}=\frac{129}{175}$，$P(\xi=1)=\frac{C_{43}^1\cdot C_7^1}{C_{50}^2}=\frac{43}{175}$，$P(\xi=2)=\frac{C_7^2}{C_{50}^2}=\frac{3}{175}$， …………… (3 分)

ξ	0	1	2
P	$\frac{129}{175}$	$\frac{43}{175}$	$\frac{3}{175}$

$E(\xi)=0\times\frac{129}{175}+1\times\frac{43}{175}+2\times\frac{3}{175}=\frac{7}{25}$. ………………………………………… (6 分)

(2)(ⅰ)设池塘乙中鱼数为 m，则 $\frac{50}{m}=\frac{5}{20}$，解得 $m=200$，

故池塘乙中的鱼数为 200. ………………………………………………………………… (7 分)

(ⅱ)设池塘乙中鱼数为 n，令事件 B=“再捉 20 条鱼，5 条有记号”，事件 C=“池塘乙中鱼数为 n”，则 $p_n=P(B|C)=\frac{C_{50}^5\cdot C_{n-50}^{15}}{C_n^{20}}$， ………………………………………………… (8 分)

由最大似然估计法，即求 p_n 最大时 n 的值，其中 $n\geqslant 65$，

所以 $\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{\frac{C_{50}^5\cdot C_{n-49}^{15}}{C_{n+1}^{20}}}{\frac{C_{50}^5\cdot C_{n-50}^{15}}{C_n^{20}}}=\frac{(n-49)(n-19)}{(n-64)(n+1)}$， …………………………………… (10 分)

当 $n=65,\cdots,198$ 时，$\frac{p_{n+1}}{p_n}>1$，

当 $n=199$ 时，$\frac{p_{n+1}}{p_n}=1$，

当 $n=200,201,\cdots$ 时，$\frac{p_{n+1}}{p_n}<1$，所以池塘乙中的鱼数为 199 或 200. ……………… (12 分)

21. 解析：(1)因为双曲线的右焦点为 $F(2,0)$，所以 $a^2+b^2=4$，

因为双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即 $b=\sqrt{3}a$，

所以 $a^2+b^2=4a^2=4$，所以 $a=1,b=\sqrt{3}$. …………………………………………………… (3 分)

所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………… (5 分)

(2)证明：设直线 BP 的斜率为 $k(k\neq 0)$，则直线 BP 的方程为 $y=k(x-1)$，

又 $OQ/\!/PB$，所以直线 OQ 的方程为 $y=kx$，Q 点的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{k}{2})$.

联立直线 BP 与双曲线 C 的方程$\begin{cases}y=k(x-1),\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

消去 y 得$(k^2-3)x^2-2k^2x+k^2+3=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{2k^2}{k^2-3}$，则 M 点的坐标为$(\frac{k^2}{k^2-3},\frac{3k}{k^2-3})$. ……………………………… (8 分)

又 $F(2,0)$，易得，直线 QF 的斜率为$-\frac{k}{3}$，直线 OM 的斜率为$\frac{3}{k}$，

由于$-\frac{k}{3}\cdot\frac{3}{k}=1$，则直线 OM 与直线 QF 垂直.

设直线 OM 与直线 QF 的交点为 $G(x,y)$，则$\overrightarrow{GO}\cdot\overrightarrow{GF}=0$.

$\overrightarrow{GO}=(-x,-y)$，$\overrightarrow{GF}=(2-x,-y)$，

则$\overrightarrow{GO}\cdot\overrightarrow{GF}=x^2-2x+y^2=0$.

即直线 OM 与直线 QF 的交点 G 在曲线$(x-1)^2+y^2=1$ 上. ……………………… (12 分)

22. 解析：(1)$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，$x\in[-\pi,\pi]$. ……………………………………………… (1 分)

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$.

当 $x\in[-\pi,-\frac{\pi}{4})$或 $x\in(\frac{3\pi}{4},\pi]$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$的单调递减区间是$[-\pi,-\frac{\pi}{4}]$，$[\frac{3\pi}{4},\pi]$，单调递增区间是$[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$. …… (3 分)

又 $f(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，$f(\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$，

故 $f(x)$的极小值为$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，极大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$. ……………………………………………… (5 分)

(2)由对称性，不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$，则不等式 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a>0$，

即为 $f(x_2)+ax_2^2>f(x_1)+ax_1^2$. ……………………………………………………………… (6 分)

设 $g(x)=f(x)+ax^2$，则 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，无界学习公众号

故 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\geqslant0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立.

设 $h(x)=g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax$，

则 $h(0)=1>0$，$h(\pi)=-e^\pi+2a\pi\geqslant0$，解得 $a\geqslant\dfrac{e^\pi}{2\pi}$.

$h'(x)=2(e^x\cos x+a)$，

$h'(0)=2(a+1)>0$，$h'(\pi)=2(a-e^\pi)$. ……………………………………………………… (8 分)

①当 $a\geqslant e^\pi$ 时，令 $\varphi(x)=h'(x)$，则 $\varphi'(x)=2e^x(\cos x-\sin x)$.

当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 时，$\varphi'(x)\geqslant0$，故 $\varphi(x)$ 单调递增，即 $h'(x)$ 单调递增；

当 $x\in[\dfrac{\pi}{4},\pi]$ 时，$\varphi'(x)\leqslant0$，故 $\varphi(x)$ 单调递减，即 $h'(x)$ 单调递减.

此时 $h'(x)\geqslant\min\{h'(0),h'(\pi)\}=h'(\pi)=2(a-e^\pi)\geqslant0$，

故 $h(x)=g'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

故 $h(x)=g'(x)\geqslant g'(0)=1>0$，符合条件. ……………………………………………… (10 分)

②当 $\dfrac{e^\pi}{2\pi}\leqslant a<e^\pi$ 时，同①可得，当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 时，$h'(x)$ 单调递增；当 $x\in[\dfrac{\pi}{4},\pi]$ 时，$h'(x)$ 单调递减.

又 $h'(\dfrac{\pi}{4})>h'(0)=2(a+1)>0$，$h'(\pi)=2(a-e^\pi)<0$，

所以，由连续函数零点存在性定理及单调性知，$\exists x_0\in(\dfrac{\pi}{4},\pi)$，$h'(x_0)=0$.

于是，当 $x\in[0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)=g'(x)$ 单调递增；当 $x\in(x_0,\pi]$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)=g'(x)$ 单调递减.

又因为 $h(0)=1>0$，$h(\pi)=-e^\pi+2a\pi\geqslant0$，

所以 $g'(x)=h(x)\geqslant\min\{h(0),h(\pi)\}\geqslant0$，符合条件.

综上，实数 a 的取值范围是 $[\dfrac{e^\pi}{2\pi},+\infty)$. ………………………………………… (12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线