

高三数学考试

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x > 1\}$, $N = \{x | -1 < 3x - 1 < 8\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $(3, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(1, 3)$
2. 已知 $z = 2 + i$, 则 iz 在复平面内对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限
 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-\frac{1}{2})^n$, 则
 A. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列
 B. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列
 C. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列
 D. 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{4}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列
4. $(2x - y)^5$ 的展开式中, $x^2 y^3$ 的系数为
 A. -40 B. 10 C. -10 D. 40
5. 牛皮鼓, 又称堂鼓、喜庆鼓, 多用于江南祠堂内婚嫁迎娶和迎新年等。牛皮鼓的制作工艺考究, 有数十道工序, 包括处理牛皮、刨制鼓腔、蒙皮、拉皮、钉钉, 每道工序都考验着手艺人的技艺和耐心。如图所示的牛皮鼓的鼓面直径为 50 cm, 鼓身高度为 60 cm, 用平行于鼓面的平面截牛皮鼓, 所得截面圆的最大直径为 60 cm, 若将该牛皮鼓看成由两个相同的圆台拼接而成, 忽略鼓面与鼓身的厚度, 则该牛皮鼓的体积为
 A. $22750\pi \text{ cm}^3$
 B. $45500\pi \text{ cm}^3$
 C. $23750\pi \text{ cm}^3$
 D. $47500\pi \text{ cm}^3$



6. 若 $a = \log_3 6, b = 2, c = \log_{0.25} 0.125$, 则

- A. $a > c > b$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $a > b > c$

7. 设曲线 $y = x^3 - 2x^2 + 1$ 在 $x = k$ 处的切线为 l , 若 l 的倾斜角小于 135° , 则 k 的取值范围是

- A. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, 0] \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$
 C. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup (\frac{4}{3}, +\infty)$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在 C 上, 且 $PF_1 \perp F_1F_2$,

直线 PF_2 与 C 交于另一点 Q , 与 y 轴交于点 M , 若 $\overrightarrow{MF_2} = 2\overrightarrow{F_2Q}$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{4}$ 对称
 C. $f(x) + f(-x) = \sqrt{2} \cos x$ D. $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{5\pi}{4}, 0)$ 对称

10. 有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 , 其中任何两个数都不相等, 现在删去其中一个数据, 得到一组新数据, 则下列判断正确的是

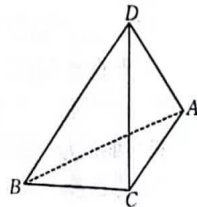
- A. 新数据的极差可能等于原数据的极差
 B. 新数据的中位数可能等于原数据的中位数
 C. 若新数据的平均数等于原数据的平均数, 则新数据的方差大于原数据的方差
 D. 若新数据的平均数等于原数据的平均数, 则新数据的 20% 分位数小于原数据的 20% 分位数

11. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = xf(y) + yf(x)$, 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $g(x)$ 满足 $g(x+1) = (x+1)(x^2+2x)$, 则

- A. $f(x)$ 不是奇函数 B. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数
 C. $g(x)$ 是奇函数 D. $g(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数

12. 如图, 在三棱锥 $D-ABC$ 中, 平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , $AB = AC = BC = BD = 3, AD = 2$, 则

- A. 三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 $\sqrt{6}$
 B. 点 C 到直线 AD 的距离为 $\frac{\sqrt{34}}{2}$
 C. 二面角 $B-AD-C$ 的正切值为 $\frac{3\sqrt{6}}{4}$
 D. 三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心到平面 ABD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若双曲线的焦距为 6, 实轴长为 2, 则该双曲线的虚轴长为 .



14. 在矩形 $ABCD$ 中, O 为对角线的交点, E 为 BC 上一点, 且向量 \vec{AE} 在向量 \vec{AD} 上的投影向量为 $\frac{1}{3}\vec{AD}$, $\vec{OE} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AD}$, 则 $\lambda - \mu =$ \blacktriangle .

15. 已知圆 M 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 内切, 且圆 M 与直线 $x = 2$ 相切, 则圆 M 的圆心的轨迹方程为 \blacktriangle .

16. 已知 $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 则当 $\tan 2\theta - \tan \theta$ 取得最大值时, $\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta} =$ \blacktriangle .

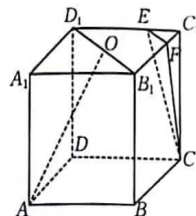
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为 B_1D_1 的中点, $\vec{ED_1} = 2\vec{C_1E}$, $\vec{FB_1} = 2\vec{C_1F}$.

(1) 证明: $B_1D_1 \parallel$ 平面 CEF .

(2) 求直线 AO 与平面 CEF 所成角的正弦值的平方.



18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 11C$, $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

(1) 若 $\cos A = \frac{4}{5}$, 求 BC 的长;

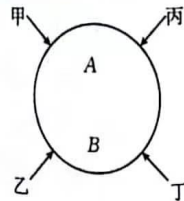
(2) 若 $A = 2C$, D 为 AB 延长线上一点, E 为 AC 边上一点, 且 $AE = \sqrt{3}$, $DE = \sqrt{7}$, 求 $\triangle BDE$ 的面积.

19. (12 分)

艾伦·麦席森·图灵提出的图灵测试, 指测试者与被测试者在隔开的情况下, 通过一些装置 (如键盘) 向被测试者随意提问. 已知在某一轮图灵测试中有甲、乙、丙、丁 4 名测试者, 每名测试者向一台机器 (记为 A) 和一个人 (记为 B) 各提出一个问题, 并根据机器 A 和人的作答来判断谁是机器, 若机器 A 能让至少一半的测试者产生误判, 则机器 A 通过本轮的图灵测试. 假设每名测试者提问相互独立, 且甲、乙、丙、丁四人之间的提问互不相同, 而每名测试者有 60% 的可能性会向 A 和 B 问同一个题. 当同一名测试者提出的两个问题相同时, 机器 A 被误判的可能性为 10%, 当同一名测试者提的两个问题不不同时, 机器 A 被误判的可能性为 35%.

(1) 当回答一名测试者的问题时, 求机器 A 被误判的概率;

(2) 按现有设置程序, 求机器 A 通过本轮图灵测试的概率.



20. (12分)

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1=1, S_{n+1}+S_n=(n+1)^2$.

(1) 证明: $a_{n+1}+a_n=2n+1$.

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 若 $b_n = \frac{1-a_n}{2^{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

21. (12分)

已知抛物线 $C: y^2=2px$ 经过点 $(2, -2\sqrt{6})$, 直线 $l_1: y=kx+m (km \neq 0)$ 与 C 交于 A, B 两点 (异于坐标原点 O).

(1) 若 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 证明: 直线 l_1 过定点.

(2) 已知 $k=2$, 直线 l_2 在直线 l_1 的右侧, $l_1 \parallel l_2$, l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\sqrt{5}$, l_2 交 C 于 M, N 两点, 试问是否存在 m , 使得 $|MN| - |AB| = 10$? 若存在, 求 m 的值; 若不存在, 说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \cos ax + \frac{1}{2}x^2 - 1$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围.