·英才大联考长郡中学2024届高三月考试卷(一)

数学参考答案

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	D	C	C	B	D	D

1. A 【解析】解不等式 $x^2-x-6<0$,得 $-2<x<3$,则 $A=\{x|-2<x<3\}$,
解不等式 $\log_2 x<1$,得 $0<x<2$,即 $B=\{x|0<x<2\}$,
所以 $A\cup B=(-2,3)$,故选 A.

2. B 【解析】若向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $3\times2-\lambda(\lambda-1)=0$,即 $\lambda^2-\lambda-6=0$,解得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=3$,
所以“$\lambda=3$”是“$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$”的充分不必要条件.故选 B.

3. D 【解析】因为 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$,所以 $-\bar{z}=-a+b\mathrm{i}$,故 A 错误;
$z\times\bar{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2+b^2$,$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$,故 B 错误;
$z^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$,$|z|^2=a^2+b^2$,故 C 错误;
由复数的几何意义可知,$|z_1-(-z_2)|\leqslant|z_1|+|-z_2|$,则 $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$,故 D 正确.
故选 D.

4. C 【解析】依题意,圆 $C:x^2+(y-\sqrt{13})^2=18$,故圆心 $C(0,\sqrt{13})$ 到直线 $l:3\sin\theta\cdot x-2y=0$ 的距离 $d=\dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{9\sin^2\theta+4}}$,故 $|MN|=2\sqrt{18-\dfrac{4\times13}{9\sin^2\theta+4}}\geqslant2\sqrt{5}$,当且仅当 $\sin^2\theta=0$ 时等号成立,故 $|MN|_{\min}=2\sqrt{5}$,故选 C.

5. C 【解析】因为 $a_1=\dfrac{2}{5}<\dfrac{1}{2}$,所以 $a_2=\dfrac{4}{5}$,$a_3=\dfrac{3}{5}$,$a_4=\dfrac{1}{5}$,$a_5=\dfrac{2}{5}$,所以数列具有周期性,周期为4,所以 $a_{2023}=a_3=\dfrac{3}{5}$.故选 C.

6. B 【解析】截成的铁丝最小为1,因此第一段为1,
因 n 段之和为定值,欲 n 尽可能的大,则必须每段的长度尽可能小,所以第二段为1,
又因为任意三条线段都不能构成三角形,
所以三条线段中较小两条之和不超过最长线段,
又因为每段的长度尽可能小,所以第三段为2,
为了使得 n 最大,因此要使剩下的铁丝尽可能长,因此每一条线段总是前面的相邻两段之和,
依次为:1,1,2,3,5,8,13,21,34,以上各数之和为88,与89相差1,因此可以取最后一段为35,这时 n 达到最大为9.故选 B.

7. D 【解析】由题设有 $f(x)=\dfrac{1-\cos\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,

令 $f(x)=0$,则有 $\omega x-\dfrac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $x=\dfrac{k\pi+\dfrac{\pi}{4}}{\omega},k\in\mathbf{Z}$.

因为 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点,

故存在整数 k,使得 $\dfrac{k\pi+\dfrac{\pi}{4}}{\omega}\leqslant\pi<2\pi\leqslant\dfrac{k\pi+\dfrac{5\pi}{4}}{\omega}$,

即 $\begin{cases}\omega\geqslant k+\dfrac{1}{4},\\ \omega\leqslant\dfrac{k}{2}+\dfrac{5}{8},\end{cases}$ 因为 $\omega>0$,所以 $k\geqslant-1$ 且 $k+\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{k}{2}+\dfrac{5}{8}$,故 $k=-1$ 或 $k=0$,

所以 $0<\omega\leqslant\dfrac{1}{8}$ 或 $\dfrac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{5}{8}$,故选 D.

8. D 【解析】设 $g(x)=x^2-\dfrac{a}{2}x-4$,其判别式 $\Delta=\dfrac{a^2}{4}+16>0$,

∴函数 $g(x)$ 一定有两个零点,设 $g(x)$ 的两个零点为 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$,

由 $x^2-\dfrac{a}{2}x-4=0$,得 $x_1=\dfrac{\dfrac{a}{2}-\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+16}}{2}$,$x_2=\dfrac{\dfrac{a}{2}+\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+16}}{2}$,

$$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{2}x+4, x<x_1,\\ 2x^2-\dfrac{a}{2}x-4, x_1\leqslant x\leqslant x_2,\\ \dfrac{a}{2}x+4, x>x_2.\end{cases}$$

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递减或为常函数，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 不可能单调递增，故 $a>0$；

②当 $a>0$ 时，$g(-2)=a>0$，故 $x_1>-2$，则 $-2<x_1<0$，

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上也单调递增，

$g(\sqrt{3})=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-1<0$，$\sqrt{3}<x_2$，

由 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{a}{8},x_2\right]$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上都单调递增，且函数的图象是连续的，

$\therefore f(x)$ 在 $\left[\dfrac{a}{8},+\infty\right)$ 上单调递增，欲使 $f(x)$ 在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增，只需 $\dfrac{a}{8}\leqslant\sqrt{3}$，得 $a\leqslant 8\sqrt{3}$，

综上，实数 a 的范围是 $0<a\leqslant 8\sqrt{3}$. 故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题　号	9	10	11	12
答　案	BC	ABC	ABD	ABD

9. BC　**【解析】**对于 A，当 $a=b$ 时，函数 $f(x)=ae^{-x}+ae^{x}$，此时 $f(-x)=ae^{x}+ae^{-x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 A 错误.

对于 B，当 $ab<0$ 时，令 $a>0$，$b<0$，函数 $y=ae^{x}$ 在其定义域上为单调递增函数，函数 $y=\dfrac{b}{e^{x}}$ 在其定义域上也为单调递增函数，故函数 $f(x)=ae^{x}+\dfrac{b}{e^{x}}$ 在其定义域上为单调递增函数；

令 $a<0$，$b>0$，函数 $y=ae^{x}$ 在其定义域上为单调递减函数，函数 $y=\dfrac{b}{e^{x}}$ 在其定义域上也为单调递减函数，故函数 $f(x)=ae^{x}+\dfrac{b}{e^{x}}$ 在其定义域上为单调递减函数；

综上，如果 $ab<0$，那么 $f(x)$ 为单调函数，故 B 正确.

对于 C，当 $a>0$，$b>0$ 时，函数 $f(x)=ae^{x}+be^{-x}\geqslant 2\sqrt{ae^{x}\cdot be^{-x}}=2\sqrt{ab}>0$，

当 $a<0$，$b<0$ 时，函数 $f(x)=-(-ae^{x}-be^{-x})\leqslant -2\sqrt{(-ae^{x})\cdot(-be^{-x})}=-2\sqrt{ab}<0$；

综上，如果 $ab>0$，那么函数 $f(x)$ 没有零点，故 C 正确.

对于 D，由 $ab=1$，则 $b=\dfrac{1}{a}$，

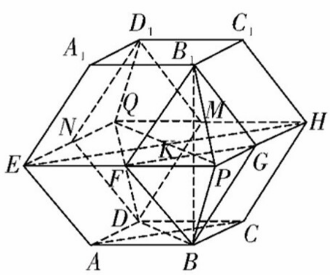
当 $a<0$，$b<0$ 时，函数 $f(x)=-\left(-ae^{x}-\dfrac{1}{a}e^{-x}\right)\leqslant -2\sqrt{(-ae^{x})\cdot\left(-\dfrac{1}{a}e^{-x}\right)}=-2$；

当 $a>0$，$b>0$ 时，函数 $f(x)=ae^{x}+\dfrac{1}{a}e^{-x}\geqslant 2\sqrt{ae^{x}\cdot\dfrac{1}{a}e^{-x}}=2$；

故 $ab=1$ 时，函数 $f(x)$ 可能没有最小值，故 D 错误.

故选 BC.

10. ABC　**【解析】**将几何体 1 与几何体 2 合并在一起，连接 BB_1，FG，PQ，EH，AC，BD，记 $FG\cap PQ=K$，易得 $K\in BB_1$，



对于 A，因为在正四棱台 $ABCD$-$EPHQ$ 中，$AB\parallel EP$，F 是 EP 的中点，

所以 $AB\parallel EF$，

又 N 是 EQ 的中点，$EN=2$，所以 $EQ=4$，则 $EP=4$，$EF=2$，
又 $AB=2$，所以 $AB=EF$，
所以四边形 $ABFE$ 是平行四边形，则 $BF=AE=2$，
同理，$B_1F=B_1G=BG=2$，
所以四形边 B_1FBG 是边长为 2 的菱形，
在边长为 4 的正方形 $EPHQ$ 中，$HE=4\sqrt{2}$，
因为 F，G 是 EP，PH 的中点，所以 $FG/\!/EH$，$FG=\frac{1}{2}EH=2\sqrt{2}$，
所以 $BB_1=2\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$，故 A 正确；
对于 B，因为在正四棱台 $ABCD-EPHQ$ 中，平面 $ABCD/\!/$平面 $EPHQ$，
又平面 $AEHC\cap$平面 $ABCD=AC$，平面 $AEHC\cap$平面 $EPHQ=EH$，
所以 $AC/\!/EH$，又 $FG/\!/EH$，所以 $FG/\!/AC$，故 B 正确；
对于 C，在四边形 $EPHQ$ 中，由比例易得 $PK=\frac{1}{4}PQ=\sqrt{2}$，
由对称性可知 $BK=\frac{1}{2}B_1B=\sqrt{2}$，而 $PB=2$，
所以 $PK^2+BK^2=PB^2$，则 $PK\perp BK$，即 $PQ\perp BK$，
而由选项 B 同理可证 $BD/\!/PQ$，所以 $BD\perp BK$，
因为在正方形 $ABCD$ 中，$BD\perp AC$，而 $FG/\!/AC$，所以 $BD\perp FG$，
因为 $BK\cap FG=K$，BK，$FG\subset$平面 BFB_1G，所以 $BD\perp$平面 BFB_1G，故 C 正确；
对于 D，由选项 A 易知四边形 BGB_1F 是边长为 2 的正方形，上下底面也是边长为 2 的正方形，
四边形 $ABFE$ 是边长为 2 的菱形，其高为$\sqrt{2^2-\left(\frac{4-2}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，
所以几何体 2 是由 4 个边长为 2 正方形和 8 个上述菱形组合而成，
所以其表面积为 $4\times2^2+8\times2\times\sqrt{3}=16+16\sqrt{3}$，故 D 错误.
故选 ABC.

11. ABD 【解析】对于 A，$\sum\limits_{t=0}^{2n}f(t)=\sum\limits_{t=0}^{2n}P(\xi=t)=1$，所以 A 正确；
对于 B，因为$\sum\limits_{t=0}^{2n}tf(t)=E(\xi)=2np$，所以 B 正确；
对于 C，当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{t=0}^{n}f(2t)=\sum\limits_{t=1}^{n}f(2t-1)=\frac{1}{2}$，所以 C 错误；
对于 D，因为$(2n+1)p=12+p$，所以当 $t=12$ 时，$f(t)$ 最大，所以 D 正确；
证明如下：若 $\xi\sim B(n,p)$，则$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=\frac{C_n^kp^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$，
若 $P(\xi=k)>P(\xi=k-1)$，则$\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}>1$，解得 $k<(n+1)p$，
故当 $k<(n+1)p$ 时，$P(\xi=k)$ 单调递增，当 $k>(n+1)p$ 时，$P(\xi=k)$ 单调递减，
即当$(n+1)p$ 为整数时，$k=(n+1)p$ 或 $k=(n+1)p-1$ 时，$P(\xi=k)$取得最大值，
当$(n+1)p$ 不为整数时，k 为$(n+1)p$ 的整数部分时，$P(\xi=k)$取得最大值.
故选 ABD.

12. ABD 【解析】对于 A，由已知 $ab\neq0$，函数 $f(x)=e^{ax}+x^2+bx$，可得 $f'(x)=ae^{ax}+2x+b$，
令 $g(x)=ae^{ax}+2x+b$，$\therefore g'(x)=a^2e^{ax}+2>0$，则 $f'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，
令 $f'(x)=ae^{ax}+2x+b=0$，则 $ae^{ax}=-2x-b$，
当 $a>0$ 时，作出函数 $y=ae^{ax}$，$y=-2x-b$ 的大致图象如图 1，

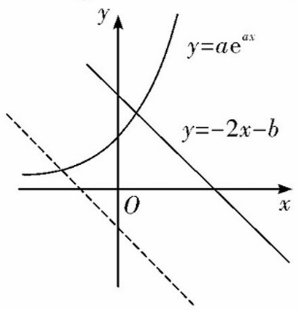


图1

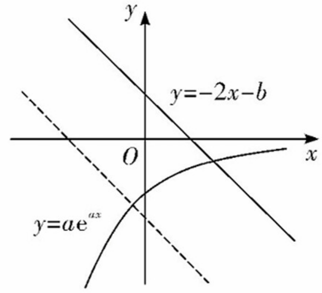


图2

当 $a<0$ 时，作出函数 $y=ae^{ax}$，$y=-2x-b$ 的大致图象如图 2，
可知 $y=ae^{ax}$，$y=-2x-b$ 的图象总有一个交点，
即 $f'(x)=ae^{ax}+2x+b=0$ 总有一个根 x_0，
当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$；
此时 $f(x)$ 存在唯一极小值点，A 正确；
对于 B，由于 $f(0)=1$，故原点不在曲线 $f(x)=e^{ax}+x^2+bx$ 上，且 $f'(x)=ae^{ax}+2x+b$，设切点为 (m,n)，$n=e^{am}+m^2+bm$，则 $f'(m)=ae^{am}+2m+b=\frac{n}{m}=\frac{e^{am}+m^2+bm}{m}$，即 $ae^{am}+m=\frac{e^{am}}{m}$，即 $e^{am}(am-1)+m^2=0$，
令 $h(m)=e^{am}(am-1)+m^2$，$h'(m)=ae^{am}(am-1)+ae^{am}+2m=m(a^2e^{am}+2)$，
当 $m<0$ 时，$h'(m)<0$，$h(m)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，
当 $m>0$ 时，$h'(m)>0$，$h(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
故 $h(m)_{\min}=h(0)=-1$，
又当 $m\to-\infty$ 时，$h(m)\to+\infty$；当 $m\to+\infty$ 时，$h(m)\to+\infty$，
故 $h(m)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上各有一个零点，即 $e^{am}(am-1)+m^2=0$ 有两个解，
故对任意 a,b，曲线 $y=f(x)$ 过原点的切线有两条，B 正确；
对于 C，当 $a+b=-2$ 时，$b=-2-a$，$f(x)=e^{ax}+x^2-(a+2)x$，
故 $f'(x)=ae^{ax}+2x-a-2$，其在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$f'(0)=-2<0$，
$f'(1)=ae^a-a=a(e^a-1)>0$，故存在 $s\in(0,1)$，使得 $f'(s)=0$，
即 $e^{as}=-\frac{2}{a}s+1+\frac{2}{a}$，
结合 A 的分析可知，$f(x)$ 的极小值也即最小值为
$f(s)=e^{as}+s^2-(a+2)s=-\frac{2}{a}s+1+\frac{2}{a}+s^2-(a+2)s$，
令 $m(s)=-\frac{2}{a}s+1+\frac{2}{a}+s^2-(a+2)s$，则 $m'(s)=2s-\left(a+\frac{2}{a}+2\right)$，且为增函数，
当 $a<0$，$m'(0)=-\left(a+\frac{2}{a}+2\right)\geqslant2\sqrt{2}-2>0$，当且仅当 $a=-\sqrt{2}$ 时取等号，
故当 $s>0$ 时，$m'(s)>m'(0)>0$，则 $f(s)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，
故 $f(s)>f(0)=\frac{2}{a}+1$，令 $a=-3$，则 $f(0)=\frac{2}{a}+1=\frac{1}{3}>0$，故 $f(s)>f(0)>0$，
此时 $f(x)$ 的最小值为 $f(s)>0$，$f(x)$ 无零点，C 错误；
对于 D，当 $a+b>0$ 时，$f(|x|)$ 为偶函数，考虑 $x>0$ 的情况，
此时 $f(|x|)=f(x)=e^{ax}+x^2+bx(x>0)$，$f'(x)=ae^{ax}+2x+b$，
结合 A 的分析可知 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$f'(0)=a+b>0$，
故 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
又 $f(|x|)$ 为偶函数，故 $f(|x|)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，
故 $f(|x|)_{\min}=f(0)=1$，D 正确，
故选 ABD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\frac{11}{5}$ **【解析】** 因为 $\tan\alpha=3$，则 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

所以 $\cos2\alpha+\tan\alpha=3-\frac{4}{5}=\frac{11}{5}$.

14. 2023 **【解析】** 用 1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数中，满足个位小于百位且百位小于万位的五位数有 $C_5^3A_2^2=20$ 个，即 $n=20$，
当 $n=20$ 时，不妨设 $x\neq0$，则 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+3}-x^3$
$=(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{23}-x^3$
$=\frac{(1+x)^3[1-(1+x)^{21}]}{1-(1+x)}-x^3=\frac{(1+x)^3-(1+x)^{24}}{-x}-x^3=\frac{(1+x)^{24}}{x}-\frac{(1+x)^3}{x}-x^3$，
所以 x^2 的系数是 $C_{24}^3-C_3^3=2024-1=2023$.

15. $48\sqrt{3}$ **【解析】** 由题意，考虑小球与正四面体的一个面相切时的情况，
易知小球在面上最靠近边的切点的轨迹仍为正三角形，正四面体的棱长为 $3\sqrt{6}$，
故小三角形的边长为 $\sqrt{6}$，
小球与一个面不能接触到的部分的面积为

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{6}\times3\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$，

所以几何体的四个面永远不可能接触到容器的内壁的面积是 $4\times12\sqrt{3}=48\sqrt{3}$.

16. $[\sqrt{7},\sqrt{10}]$ **【解析】**设 $A(-c,0)$，$A_1(c,0)$，则设 $D\left(-\frac{c}{2},h\right)$，$C\left(\frac{c}{2},h\right)$，(其中 c 为双曲线的半焦距，h 为 C，D 到 x 轴的距离)，

$\because\frac{AE}{EC}=\lambda$，则 $\therefore\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{EC}$，即 $(x_E+c,y_E)=\lambda\left(\frac{c}{2}-x_E,h-y_E\right)$，

$\therefore x_E=\dfrac{-c+\frac{c}{2}\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{c(\lambda-2)}{2(\lambda+1)}$，$y_E=\dfrac{h\lambda}{1+\lambda}$，

即 E 点坐标为 $\left(\frac{c(\lambda-2)}{2(\lambda+1)},\frac{h\lambda}{\lambda+1}\right)$，

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，将 $a=\frac{c}{e}$ 代入方程，得 $\frac{e^2x^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，①

将 $C\left(\frac{c}{2},h\right)$，$E\left(\frac{c(\lambda-2)}{2(\lambda+1)},\frac{h\lambda}{\lambda+1}\right)$ 代入①式，整理得 $\frac{e^2}{4}-\frac{h^2}{b^2}=1$，$\frac{e^2}{4}\left(\frac{\lambda-2}{\lambda+1}\right)^2-\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2\frac{h^2}{b^2}=1$，

消去 $\frac{h^2}{b^2}$，得 $2\lambda+e^2\lambda=e^2-1$，所以 $\lambda=\frac{e^2-1}{e^2+2}=1-\frac{3}{e^2+2}$，

由于 $\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$. 所以 $\frac{2}{3}\leqslant1-\frac{3}{e^2+2}\leqslant\frac{3}{4}$，故 $7\leqslant e^2\leqslant10$，$\therefore\sqrt{7}\leqslant e\leqslant\sqrt{10}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **【解析】**(1) 因为 $2(a\sin A+c\sin C-b\sin B)^2=a^2(1-\cos 2C)$，

所以 $(a\sin A+c\sin C-b\sin B)^2=a^2\sin^2C$，

可得 $a\sin A+c\sin C-b\sin B=a\sin C$ 或 $a\sin A+c\sin C-b\sin B=-a\sin C$，

即 $a^2+c^2-b^2=ac$ 或 $a^2+c^2-b^2=-ac$，…………………………………………………… 3 分

所以 $\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}=\pm\frac{1}{2}$，又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$. …………………………… 5 分

(2) 因为 $a+c=2b$，所以 $\sin A+\sin C=2\sin B$.

当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}$，

可得 $\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}$，所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，

又因为 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………… 7 分

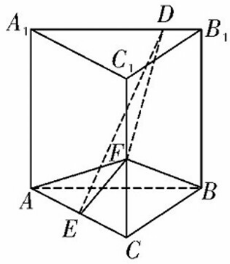
当 $B=\frac{2\pi}{3}$ 时，$\sin A+\sin\left(A+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\frac{2\pi}{3}$，

可得 $\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}$，所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，无解，…………………………… 9 分

综上，当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，存在 $A=\frac{\pi}{3}$，使得 $a+c=2b$；

当 $B=\frac{2\pi}{3}$ 时，不存在 $A\in(0,\pi)$，使得 $a+c=2b$. …………………………………………… 10 分

18. **【解析】**(1) 连接 AF，



$\because E,F$ 分别为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱 AC 和 CC_1 的中点，且 $AB=BC=2$，

$\therefore CF=1$，$BF=\sqrt{5}$，

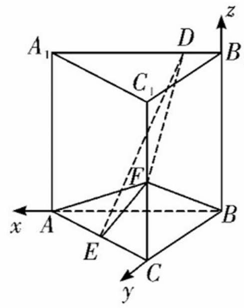
$\because BF\perp A_1B_1$，$AB/\!/A_1B_1$，

$\therefore BF\perp AB$，

$\therefore AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3, AC=\sqrt{AF^2-CF^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2$，即 $BA\perp BC$，…………………………………………………………………… 2 分

故以 B 为原点，BA,BC,BB_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(2,0,0)$，$B(0,0,0)$，$C(0,2,0)$，$E(1,1,0)$，$F(0,2,1)$，

设 $B_1D=m$，且 $m\in[0,2]$，则 $D(m,0,2)$，

$\therefore \overrightarrow{BF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DE}=(1-m,1,-2)$，

$\therefore \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，即 $BF\perp DE$. …………………………………………………………………… 5 分

(2) $\because AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore$ 平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\boldsymbol{p}=(1,0,0)$，………………………… 6 分

由(1)知，$\overrightarrow{DE}=(1-m,1,-2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,1,1)$，

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(1-m)x+y-2z=0,\\ -x+y+z=0,\end{cases}$

令 $x=3$，则 $y=m+1$，$z=2-m$，$\therefore \boldsymbol{n}=(3,m+1,2-m)$，…………………………………………… 8 分

$\therefore |\cos\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{p}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{1\times\sqrt{9+(m+1)^2+(2-m)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2m^2-2m+14}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{2}}}$，… 10 分

又 $m\in[0,2]$，

$\therefore$ 当 $m=2$ 时，平面 BB_1C_1C 与平面 DFE 所成的二面角的余弦值最小，此时正弦值最大，

故当 $B_1D=2$ 时，平面 BB_1C_1C 与平面 DFE 所成的二面角的正弦值最大. ……………………………… 12 分

19.【解析】(1) 由 $\dfrac{3a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_2}$，可得 $a_n\neq0$，则 $\dfrac{3}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_2a_n}=\dfrac{1}{a_2}\left(2+\dfrac{1}{a_n}\right)$，

令 $n=1,2$，则 $\begin{cases}\dfrac{3}{a_2}=\dfrac{1}{a_2}\left(2+\dfrac{1}{a_1}\right),\\ \dfrac{3}{a_3}=\dfrac{1}{a_2}\left(2+\dfrac{1}{a_2}\right),\end{cases}$ 再结合 $\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_3}$，解得 $\begin{cases}a_2=\dfrac{1}{3},\\ a_1=1,\\ a_3=\dfrac{1}{5},\end{cases}$ ………………………………… 4 分

$\therefore \dfrac{3}{a_{n+1}}=6+\dfrac{3}{a_n}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$，又 $a_1=1$，

$\therefore \left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列. ……………………………………………………………… 6 分

(2) 由(1)知 $\dfrac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{2n-1}$，………………………………………………………… 8 分

$\therefore a_na_{n+1}=\dfrac{1}{2n-1}\cdot\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，…………………………………………………………… 10 分

$\therefore S_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$. ………………………… 12 分

20.【解析】(1) 因为 $f(x)=a(\ln x+a)-x$，定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-1$. ………………………… 1 分

当 $a\leqslant0$ 时，由于 $x>0$，所以 $f'(x)<0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；…………………… 3 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=-\dfrac{(x-a)}{x}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=a$，

则当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$，有 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，有 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减；

综上所述：当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减. ………………………………… 5 分

(2) 我们先证明引理：$\forall a>0$，恒有 $\ln a\leqslant a-1$ 且 $a+1<e^a$.

引理的证明：

设 $g(a)=a-\ln a-1$，$h(a)=e^a-a-1$. 故只需证明 $\forall a>0$，恒有 $g(a)\geqslant 0$，$h(a)>0$.

由于 $g'(a)=1-\dfrac{1}{a}$，知当 $a\in(0,1)$ 时，$g'(a)<0$；当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$g'(a)>0$；

则 $g(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(a)_{\min}=g(1)=0$，

所以 $\forall a>0$，恒有 $g(a)\geqslant 0$.

由于 $h'(a)=e^a-1$，知当 $a>0$，均有 $e^a-1>e^0-1=0$，所以恒有 $h'(a)>0$，故 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $h(a)>e^0-0-1=0$. 所以 $\forall a>0$，恒有 $h(a)>0$. ………………………………………… 7 分

综上，引理得证. 回到原题：

由(1)得 $f(x)_{\max}=f(a)=a\ln a+a^2-a$，

故只需证明：对 $\forall a>0$，恒有 $a\ln a+a^2-a<2ae^a$，即 $\ln a+a-1<2e^a$. ………………………… 9 分

由引理得 $\ln a+a-1\leqslant(a-1)+a-1<2(a+1)<2e^a$. 命题得证. ………………………… 12 分

21.【解析】(1) 由题意知 $X\sim B\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$，………………………………………… 2 分

则 $P(X=0)=C_3^0\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(X=1)=C_3^1\times\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$，$P(X=2)=C_3^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$，$P(X=3)$

$=C_3^3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，………………………………………… 4 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X)=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$. ………………………………………… 5 分

(2) 由(1)可知在一局游戏中，甲得 3 分的概率为 $\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}$，得 1 分的概率为 $\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{2}$，

若选择 $n=k$，此时要能获得大奖，则需 $2k$ 次游戏的总得分大于 $4k$，

设 $2k$ 局游戏中，得 3 分的局数为 m，则 $3m+(2k-m)>4k$，即 $m>k$.

易知 $m\sim B\left(2k,\dfrac{1}{2}\right)$，

故此时获大奖的概率

$$P_1=P(m>k)=C_{2k}^{k+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}+C_{2k}^{k+2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}+\cdots+C_{2k}^{2k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$=(C_{2k}^{k+1}+C_{2k}^{k+2}+\cdots+C_{2k}^{2k})\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{2}(C_{2k}^0+C_{2k}^1+\cdots+C_{2k}^{2k}-C_{2k}^k)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

$$=\frac{1}{2}(2^{2k}-C_{2k}^k)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\right)；$$ ………………………………………… 9 分

同理可以求出当 $n=k+1$，获大奖的概率为 $P_2=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{C_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}}\right)$，

因为 $$\frac{\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}}{\frac{C_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}}}=\frac{4C_{2k}^k}{C_{2k+2}^{k+1}}=\frac{4\,\frac{(2k)!}{(k!)(k!)}}{\frac{(2k+2)!}{[(k+1)!][(k+1)!]}}=\frac{4(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)}=\frac{2(k+1)}{2k+1}>1，$$ ………………………… 11 分

所以 $\dfrac{C_{2k}^k}{2^{2k}}>\dfrac{C_{2k+2}^{k+1}}{2^{2k+2}}$，则 $P_1<P_2$，

答：甲选择 $n=k+1$ 时，获奖的概率更大. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{y_2^2-y_1^2}=\dfrac{1}{y_1+y_2}$，

所以直线 AB 的方程为 $y-y_1=\dfrac{1}{y_1+y_2}(x-x_1)$，

化简得 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，① ………………………………………… 2 分

又$\because k_{PA}\cdot k_{PB}=-1$，即$\dfrac{1}{y_1+1}\cdot\dfrac{1}{y_2+1}=-1$，$\therefore 2+(y_1+y_2)+y_1y_2=0$，②

比较①、②，所以 AB 恒过点 $E(2,-1)$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知，直线 AB 的方程为 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，①

由 $PA\perp PB$，得$\dfrac{1}{y_1+t}\cdot\dfrac{1}{y_2+t}=-1$，

化简得 $t^2+1+t(y_1+y_2)+y_1y_2=0$，③

比较①和③式，AB 恒过点 $E(t^2+1,-t)$， ……………………………………………………………… 6 分

又 $DP\perp DE$，所以 D 点的轨迹是以 PE 为直径的圆，

圆的半径 $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{(t^2+1-t^2)^2+(-t-t)^2}=\sqrt{t^2+\dfrac{1}{4}}$，

$\therefore S_1=\pi\left(t^2+\dfrac{1}{4}\right)$. ………………………………………………………………………………… 7 分

又设直线 AB 的方程为 $m(y+t)=x-(t^2+1)$，

联立$\begin{cases}x=my+t^2+mt+1,\\ y^2=x\end{cases}$消去 x 得 $y^2-my-(t^2+mt+1)=0$(其中 $m\geqslant 0,t>0$)，

$\therefore S_2=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\dfrac{1}{2}|y_1y_2|\cdot|y_1-y_2|$

$=\dfrac{1}{2}(t^2+mt+1)\sqrt{m^2+4(t^2+mt+1)}\geqslant\dfrac{1}{2}(t^2+1)\cdot 2\sqrt{t^2+1}=(t^2+1)^{\frac{3}{2}}$， ……………………… 9 分

$\therefore \dfrac{S_2}{S_1}\geqslant\dfrac{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\pi\left(t^2+\dfrac{1}{4}\right)}$，

令 $t^2+\dfrac{1}{4}=s\left(s>\dfrac{1}{4}\right)$，则$\dfrac{S_2}{S_1}\geqslant\dfrac{\left(s+\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\pi s}$，

令 $\varphi(s)=\dfrac{\left(s+\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\pi s}\left(s>\dfrac{1}{4}\right)$，

$\varphi'(s)=\dfrac{\dfrac{3}{2}\left(s+\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}s-\left(s+\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\pi s^2}=\dfrac{\left(s-\dfrac{3}{2}\right)\left(s+\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\pi s^2}$，

所以 $\varphi(s)$在$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{2}\right)$单调递减，在$\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$单调递增.

$\therefore \varphi(s)_{\min}=\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\pi\cdot\dfrac{3}{2}}=\dfrac{9}{4\pi}$，

这时 $t^2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$，即当 $t=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$m=0$ 时取得. …………………………………………………… 12 分