座位号____ 考场号____ 考生号____ 姓名____ 班级____ 学校____

线 订 装

绝密★启用前

2023 届高三年级第二次模拟考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 0\}$，$B=\left\{a\,\middle|\,\exists x\in\mathbf{R}, x^2-ax+\frac{1}{4}<0\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $[1,2)$ B. $[-2,-1]$ C. $[-2,1)$ D. $[-2,-1)$

2. 已知复数 z 在复平面内对应的点的坐标为 $(1,-1)$，则 $\frac{3+\mathrm{i}}{z}=$

A. $2+\mathrm{i}$ B. $2-\mathrm{i}$ C. $1+2\mathrm{i}$ D. $1-2\mathrm{i}$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{12}=22$，$a_1+a_3+a_5=12$，则公差 $d=$

A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$

4. 已知建筑地基沉降预测对于保证施工安全，实现信息化监控有着重要意义. 某工程师建立了四个函数模型来模拟建筑地基沉降随时间的变化趋势，并用相关指数、误差平方和、均方根值三个指标来衡量拟合效果. 相关指数越接近 1 表明模型的拟合效果越好，误差平方和越小表明误差越小，均方根值越小越好. 依此判断下面指标对应的模型拟合效果最好的是

A.

相关指数	误差平方和	均方根值
0.949	5.491	0.499

B.

相关指数	误差平方和	均方根值
0.933	4.179	0.436

C.

相关指数	误差平方和	均方根值
0.997	1.701	0.141

D.

相关指数	误差平方和	均方根值
0.997	2.899	0.326

5. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0,\\ x-2y+1\geqslant 0,\\ x+y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=-2x+y$ 的最小值为

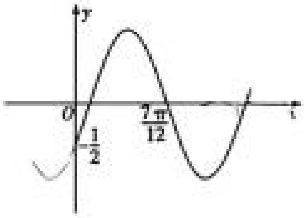
A. -5 B. -4 C. 2 D. 4

6. $(2x+y)^8$ 的展开式中各项系数的最大值为

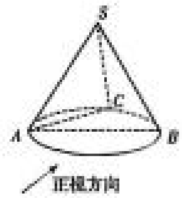
A. 112　　B. 448　　C. 896　　D. 1 792

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的值域为

A. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　C. $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$



（第 7 题图）



（第 8 题图）

8. 如图所示圆锥的正视图是边长为 2 的正三角形，AB 为底面直径，C 为$\overset{\frown}{AB}$ 的中点，则平面 SAC 与底面 ABC 所成的锐二面角的正切值为

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，且 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，P 为 C 上一点，PF_1 的中点为 Q，$\triangle PF_2Q$ 为等边三角形，则双曲线 C 的方程为

A. $x^2-\frac{y^2}{2}=1$　　B. $\frac{x^2}{2}-y^2=1$　　C. $\frac{2x^2}{3}-\frac{2y^2}{3}=1$　　D. $3x^2-\frac{3y^2}{8}=1$

10. 如图，2022 年世界杯的会徽像阿拉伯数字中的"8". 在平面直角坐标系中，圆 $M:x^2+(y+m)^2=n^2$ 和 $N:x^2+(y-1)^2=1$ 外切也形成一个 8 字形状，若 $P(0,-2)$，$A(1,-1)$ 为圆 M 上两点，B 为两圆圆周上任一点（不同于点 A,P），则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的最大值为

A. $\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$　　B. $2\sqrt{2}+1$

C. $3+\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{2}+2$

11. 已知数列 $\{x_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\frac{x_n^2-2}{2x_n-3}(x_n>2)$，$a_n=\ln\frac{x_n-2}{x_n-1}$，$a_1=1$. 若 $b_{n+2}=a_n+a_{n+2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，$b_1+b_2=4$，则数列 $\{b_n-a_n\}$ 的前 2 022 项和为

A. 2^{2022}　　B. 2^{2020}　　C. $2^{2022}-4$　　D. $2^{2020}-3$

12. 已知 a,b,c 均为负实数，且 $a=\ln\frac{a+1}{3}+2$，$b=\ln\frac{b+1}{4}+3$，$c=2e^{c-1}-1$，则

A. $b<a<c$　　B. $c<b<a$　　C. $a<b<c$　　D. $a<c<b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，且当 $x>2$ 时，$f(x)$ 和其导函数 $f'(x)$ 的单调性相反，请写出 $f(x)$ 的一个解析式：__________.

14. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 A,B 在 C 上，且 $|AF|=2$，$|BF|=5$，则 $|AB|=$__________.

15. 学校给每位教师随机发了一箱苹果,李老师将其分为两份,第1份占总数的40%,次品率为5%,第2份占总数的60%,次品率为4%. 若李老师分份之前随机拿了一个发现是次品后放回,则该苹果被分到第1份中的概率为__________.

16. 2022年12月7日为该年第21个节气"大雪". "大雪"标志着仲冬时节正式开始,该节气的特点是气温显著下降,降水量增多,天气变得更加寒冷. "大雪"节气的民俗活动有打雪仗、赏雪景等. 东北某学生小张滚了一个半径为2分米的雪球,准备对它进行切割,制作一个正六棱柱模型 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$,当削去的雪最少时,平面 ACE_1 截该正六棱柱所得的截面周长为__________分米.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤. 第17-21题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第22,23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (12分)

已知△ABC的角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $c(\sin C-\sqrt{3}\sin B)=(a-b)(\sin A+\sin B)$.

(Ⅰ)求 A;

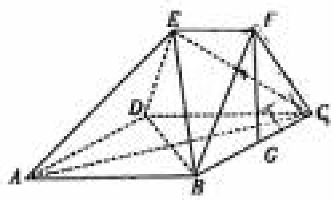
(Ⅱ)若△ABC的面积为 $\sqrt{3}$,$\sin B=1+\cos C$,点 D 为边 BC 的中点,求 AD 的长.

18. (12分)

在如图所示的几何体中,四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle BCD=60°$,$AB=4$,$EF\parallel CD$,$EF=2$,$CF=4$,点 F 在平面 $ABCD$ 内的射影恰为 BC 的中点 G.

(Ⅰ)求证:平面 $ACE\perp$ 平面 BED;

(Ⅱ)求直线 BD 与平面 $ABFE$ 所成的角的正弦值.



19. (12分)

疫情期间,某校使用一家公司的三种软件来上网课,分别为在线课堂、视频会议、在线直播. 根据效果,首选在线课堂,当在线课堂进不去时选视频会议,当在线课堂和视频会议均进不去后再选在线直播. 当该校不是该软件的会员时,老师们上网课能够进入在线课堂、视频会议、在线直播的概率分别为 $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{4}{5}$;当该校充值为会员时,老师们上网课能够进入在线课堂、视频会议、在线直播的概率均为 $\frac{3}{5}$. 设在线课堂、视频会议、在线直播的网课效果得分分别记为5分,3分,2分.

(Ⅰ)调查知前7天能完成全部网课的班级数 y 如下表所示:

第 t 天	1	2	3	4	5	6	7
y	3	4	3	4	7	6	8

已知 y 与 t 具有线性相关关系,求 y 关于 t 的线性回归方程;(t 的系数精确到0.01)

(Ⅱ)请你计算后判断学校充值为会员后，网课效果得分的数学期望是否有提高.

参考公式：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i=163$.

20.(12分)

关于椭圆有如下结论："若点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，则过点 P 的椭圆的切线方程为 $\dfrac{x\cdot x_0}{a^2}+\dfrac{y\cdot y_0}{b^2}=1$."设椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，左、右顶点分别为 A_1 和 A_2，动点 P 在椭圆 E 位于第一象限的部分上，过点 P 作椭圆 E 的切线分别与过 A_1 和 A_2 的椭圆 E 的切线相交于点 P_1 和 P_2，且 $|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=1$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的标准方程；

(Ⅱ)已知坐标原点 O 和点 $N(0,-1)$，直线 $l:y=kx+3$ 交椭圆 E 于 S,T 两点，直线 NS,NT 分别与 x 轴交于 C,D 两点，证明：$|OC|\cdot|OD|$ 为定值.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-a\ln x$ 的最小值为0.

(Ⅰ)求实数 a 的值；

(Ⅱ)证明：$e+\dfrac{\sqrt{e}}{2}+\dfrac{\sqrt[3]{e}}{3}+\cdots+\dfrac{\sqrt[2\,022]{e}}{2\,022}+\dfrac{\sqrt[2\,023]{e}}{2\,023}>\dfrac{2\,024}{2\,025}\ln 2\,025$.

(二)选考题：共10分．请考生在第22,23题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修4-4：坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 E 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t},\\ y=2\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$($t$ 为参数)．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 E 上 A,B 两点所在直线的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta+1=0$.

(Ⅰ)求曲线 E 的普通方程和直线 AB 的倾斜角；

(Ⅱ)若曲线 E 上两点 C,D 所在直线的倾斜角为 $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{6}\right)$，直线 AB 与 CD 相交于点 P，且 P 不在曲线 E 上，求 $\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}$ 的取值范围.

23.[选修4-5：不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=|2x|-2|x-3|$.

(Ⅰ)若不等式 $|f(x)|\leqslant 2$ 的解集为 $[a,b]$，求 a,b 的值；

(Ⅱ)在(Ⅰ)的条件下，若 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $a^2x^2+b^2y^2=32$，求 $x+2y-xy$ 的最小值.

2023 届高三年级第二次模拟考试

理科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. D	2. C	3. A	4. C	5. B	6. D
7. C	8. D	9. A	10. C	11. B	12. A

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $f(x)=\frac{1}{x-2}$(答案不唯一)　　14. $\sqrt{13}$或$3\sqrt{5}$

15. $\frac{5}{11}$　　16. $\frac{4\sqrt{102}}{9}+\frac{4\sqrt{66}}{9}+2\sqrt{2}$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析　(Ⅰ)因为 $c(\sin C-\sqrt{3}\sin B)=(a-b)(\sin A+\sin B)$,

所以由正弦定理可得 $c(c-\sqrt{3}b)=(a-b)(a+b)$,

即 $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$. ………………(2 分)

由余弦定理可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………………(4 分)

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{6}$. ………………(5 分)

(Ⅱ)因为 $\sin B=1+\cos C$,

所以 $\sin B=1+\cos\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)=1+\cos\frac{5\pi}{6}\cos B+\sin\frac{5\pi}{6}\sin B=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$,

即 $\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=1$, ………………(7 分)

所以 $B=\frac{\pi}{6}$.

所以 $a=b,C=\frac{2\pi}{3}$. ………………(8 分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$,

所以 $a=b=2$. ………………(10 分)

在$\triangle ACD$ 中,由余弦定理可得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$,

即 $AD=\sqrt{7}$. ………………(12 分)

18. 解析　(Ⅰ)如图,设 AC 与 BD 交于点 O,连接 OG,OE.

因为 O,G 分别为 BD,BC 的中点,所以 $OG/\!/AB,OG=\frac{1}{2}AB=2$.

因为 $EF=2=\frac{1}{2}AB,EF/\!/CD/\!/AB$,所以四边形 $EFGO$ 为平行四边形, ………………(2 分)

所以 $OE /\!/ FG$,

又 $FG \perp$ 平面 $ABCD$,

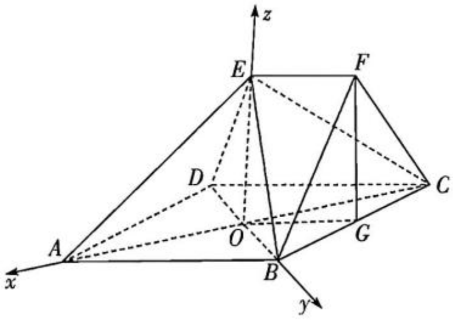
所以 $OE \perp$ 平面 $ABCD$. …………………………………………………… (3 分)

因为 $AC \subset$ 平面 $ABCD$,所以 $OE \perp AC$,

又四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AC \perp BD$. …………………………………… (4 分)

因为 $OE \cap BD = O$,所以 $AC \perp$ 平面 BED,

又 $AC \subset$ 平面 ACE,故平面 $ACE \perp$ 平面 BED. ………………………… (5 分)



(Ⅱ)因为 $FG \perp$ 平面 $ABCD$,所以 $FG \perp BC$,

所以 $FG = \sqrt{CF^2 - CG^2} = 2\sqrt{3}$,所以 $OE = 2\sqrt{3}$. ……………………… (6 分)

如图,以点 O 为坐标原点,以直线 AC 为 x 轴,直线 BD 为 y 轴,直线 OE 为 z 轴建立空间直角坐标系,则 $A(2\sqrt{3},0,0)$,$E(0,0,2\sqrt{3})$,$B(0,2,0)$,$D(0,-2,0)$, ……………………… (7 分)

所以$\overrightarrow{AE} = (-2\sqrt{3},0,2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{3},2,0)$,$\overrightarrow{BD} = (0,-4,0)$. ………………… (8 分)

设平面 $ABFE$ 的法向量为 $\boldsymbol{v} = (x,y,z)$,

则$\begin{cases} \boldsymbol{v} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \boldsymbol{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases}$即$\begin{cases} -2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}z = 0, \\ -2\sqrt{3}x + 2y = 0, \end{cases}$ ………………………………… (9 分)

令 $x = 1$,可得 $\boldsymbol{v} = (1,\sqrt{3},1)$. ………………………………………… (10 分)

设直线 BD 与平面 $ABFE$ 所成的角为 θ,

所以 $\sin\theta = \dfrac{|\overrightarrow{BD} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{v}|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4 \times \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$,

故直线 BD 与平面 $ABFE$ 所成的角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. …………………………… (12 分)

19. **解析** (Ⅰ)由题可知 $\bar{t} = \dfrac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7) = 4$,$\bar{y} = \dfrac{1}{7}(3+4+3+4+7+6+8) = 5$, ……… (1 分)

$\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i = 163$,$7\bar{t}\bar{y} = 7 \times 4 \times 5 = 140$,$\sum\limits_{i=1}^{7} t_i^2 = 140$,$7\bar{t}^2 = 112$,

所以 $\hat{b} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7} t_i y_i - 7\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7} t_i^2 - 7\bar{t}^2} = \dfrac{163-140}{140-112} = \dfrac{23}{28} \approx 0.82$, ……………………………………… (3 分)

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} = 1.72$,

所以 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.82t + 1.72$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)设该校不是会员时,网课效果得分为 X,则 X 的所有可能取值为 5,3,2,0,

$P(X=5)=\frac{1}{4}$,

$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$,

$P(X=0)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$. …………………………………………………… (7 分)

所以 $E(X)=\frac{1}{4}\times5+\frac{1}{4}\times3+\frac{2}{5}\times2+\frac{1}{10}\times0=\frac{14}{5}$. …………………………………… (8 分)

设该校是会员时,网课效果得分为 Y,则 Y 的所有可能取值为 5,3,2,0,

$P(Y=5)=\frac{3}{5}$,

$P(Y=3)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$,

$P(Y=2)=\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{12}{125}$,

$P(Y=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$. …………………………………………………………… (10 分)

所以 $E(Y)=\frac{3}{5}\times5+\frac{6}{25}\times3+\frac{12}{125}\times2+\frac{8}{125}\times0=\frac{489}{125}$. ……………………………… (11 分)

因为$\frac{489}{125}>\frac{14}{5}$,

所以该校充值为会员后,网课效果得分的数学期望有了提高. ……………………………………… (12 分)

20. 解析 (Ⅰ)设 $P(x_0,y_0)$,$x_0>0,y_0>0$,则过点 P 的椭圆的切线方程为$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$.

联立$\begin{cases}\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1,\\ x=-a,\end{cases}$可得 $P_1\left(-a,\frac{b^2(a+x_0)}{ay_0}\right)$.

同理可得 $P_2\left(a,\frac{b^2(a-x_0)}{ay_0}\right)$. ………………………………………………………… (2 分)

所以 $|P_1A_1|\cdot|P_2A_2|=\frac{b^2(a+x_0)}{ay_0}\cdot\frac{b^2(a-x_0)}{ay_0}=\frac{b^4(a^2-x_0^2)}{a^2y_0^2}=\frac{b^4(a^2-x_0^2)}{b^2(a^2-x_0^2)}=b^2=1$,即 $b=1$. ………… (3 分)

又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}$,所以 $a=2$. …………………………………… (4 分)

所以椭圆 E 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)联立直线 l 和椭圆 E 的方程得$\begin{cases}y=kx+3,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y 得 $(1+4k^2)x^2+24kx+32=0$.

由 $\Delta=(24k)^2-4\times32(1+4k^2)>0$,可得 $k^2>2$. …………………………………………… (7 分)

设 $S(x_1,y_1)$,$T(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{-24k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{32}{1+4k^2}>0$. …………………………… (8 分)

由题易知 $x_1\neq 0, x_2\neq 0, y_1\neq -1, y_2\neq -1$,

所以直线 SN 的方程为 $y+1=\frac{y_1+1}{x_1}(x-0)$,

令 $y=0$,得 $x_C=\frac{x_1}{y_1+1}$,同理 $x_D=\frac{x_2}{y_2+1}$. …………………………………………………… (9 分)

所以 $|OC|\cdot|OD|=\left|\frac{x_1}{y_1+1}\right|\cdot\left|\frac{x_2}{y_2+1}\right|$

$$=\frac{x_1x_2}{(y_1+1)(y_2+1)}$$

$$=\frac{x_1x_2}{(kx_1+4)(kx_2+4)}$$

$$=\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+4k(x_1+x_2)+16}$$ …………………………………………………… (11 分)

$$=\frac{\frac{32}{1+4k^2}}{k^2\cdot\frac{32}{1+4k^2}+4k\left(\frac{-24k}{1+4k^2}\right)+16}$$

$$=\frac{32}{16}$$

$$=2.$$

故 $|OC|\cdot|OD|$ 为定值 2. …………………………………………………… (12 分)

21. **解析** (Ⅰ)由题可知 $f'(x)=xe^x-\frac{a}{x}=\frac{x^2e^x-a}{x}(x>0)$. …………………………………… (1 分)

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 没有最小值. …………………………………………………… (2 分)

当 $a>0$ 时,设 $\varphi(x)=x^2e^x-a(x>0)$,则 $\varphi'(x)=e^x(x+2)x>0$,所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

又当 $x>0$ 且 $x\to 0$ 时,$\varphi(x)\to -a$,当 $x\to+\infty$ 时,$\varphi(x)\to+\infty$,

故 $\exists x_0>0$,使得 $\varphi(x_0)=0$,

当 $x\in(0,x_0)$ 时,$\varphi(x)<0$,$f'(x)<0$.当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$\varphi(x)>0$,$f'(x)>0$.

因为 $\varphi(x_0)=0$,所以 $x_0^2e^{x_0}=a$. …………………………………………………… (3 分)

故 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(x_0-1)e^{x_0}-a\ln x_0=(x_0-1)e^{x_0}-x_0^2e^{x_0}\ln x_0=x_0^2e^{x_0}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}-\ln x_0\right)=0$.

因为 $x_0^2e^{x_0}>0$,所以 $\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0^2}-\ln x_0=0$. …………………………………………………… (4 分)

设 $t(x)=x-x^2+\ln x$,则 $t'(x)=1-2x+\frac{1}{x}=\frac{-(2x+1)(x-1)}{x}$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$t'(x)>0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$t'(x)<0$,

所以 $t(x)_{\max}=t(1)=0$, …………………………………………………… (5 分)

所以 $\frac{1}{x_0}=1$,$x_0=1$,所以 $a=e$. …………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $(x-1)e^{x-1}\geqslant \ln x$,当且仅当 $x=1$ 时等号成立. ……………………………… (7 分)

令 $x=1+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}>\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)=\ln(n+1)-\ln n$,

从而有 $e>\ln 2-\ln 1,\frac{\sqrt{e}}{2}>\ln 3-\ln 2,\frac{\sqrt[3]{e}}{3}>\ln 4-\ln 3,\cdots,\frac{\sqrt[n]{e}}{n}>\ln(n+1)-\ln n$. ……………………… (8 分)

所以 $e+\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{\sqrt[3]{e}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt[n]{e}}{n}>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)$.

……………………………………………………………………………………………… (9 分)

令 $n=2\ 023$，则 $e+\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{\sqrt[3]{e}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt[2\ 022]{e}}{2\ 022}+\frac{\sqrt[2\ 023]{e}}{2\ 023}>\ln 2\ 024$. ……………………………………… (10 分)

只需证明 $\ln 2\ 024>\frac{2\ 024}{2\ 025}\ln 2\ 025$，即证 $\frac{\ln 2\ 024}{2\ 024}>\frac{\ln 2\ 025}{2\ 025}$.

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$， ……………………………… (11 分)

所以 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\frac{\ln 2\ 024}{2\ 024}>\frac{\ln 2\ 025}{2\ 025}$.

故 $e+\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{\sqrt[3]{e}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt[2\ 022]{e}}{2\ 022}+\frac{\sqrt[2\ 023]{e}}{2\ 023}>\frac{2\ 024}{2\ 025}\ln 2\ 025$. …………………………………………………… (12 分)

22. **解析** （Ⅰ）由 $\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=2\left(t-\frac{1}{t}\right)\end{cases}$ （t 为参数）消去参数 t，可得曲线 E 的普通方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$. ………… (2 分)

令 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 可得直线 AB 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+1=0$，

故直线 AB 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………………………………… (4 分)

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)$，

则直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}s,\\ y=y_0+\frac{1}{2}s\end{cases}$ （s 为参数），

直线 CD 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+m\cos\beta,\\ y=y_0+m\sin\beta\end{cases}$ （m 为参数）. ……………………………………………… (5 分)

将直线 CD 的参数方程代入曲线 E 的方程可得

$(4\cos^2\beta-\sin^2\beta)m^2+2(4x_0\cos\beta-y_0\sin\beta)m+(4x_0^2-y_0^2-16)=0$. ……………………………… (6 分)

设 C,D 对应的参数分别为 m_1,m_2，

根据参数 m 的几何意义，可得 $|PC|\cdot|PD|=|m_1|\cdot|m_2|=\left|\frac{4x_0^2-y_0^2-16}{4\cos^2\beta-\sin^2\beta}\right|$.

同理可得 $|PA|\cdot|PB|=\left|\frac{16x_0^2-4y_0^2-64}{11}\right|$.

所以 $\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\frac{|16\cos^2\beta-4\sin^2\beta|}{11}=\frac{|10\cos 2\beta+6|}{11}$. ……………………………………… (8 分)

因为 $0<\beta<\frac{\pi}{6}$，所以 $0<2\beta<\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{1}{2}<\cos 2\beta<1$， ……………………………………… (9 分)

故$\dfrac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}$的取值范围为$\left(1,\dfrac{16}{11}\right)$. ……………………………………………………（10 分）

23. **解析** （Ⅰ）由题可知$f(x)=\begin{cases}-6,x\leqslant 0,\\4x-6,0<x<3,\\6,x\geqslant 3.\end{cases}$ ……………………………………………（2 分）

由$|f(x)|\leqslant 2$可得$-2\leqslant f(x)\leqslant 2$, ……………………………………………………（3 分）

所以$-2\leqslant 4x-6\leqslant 2$,所以$1\leqslant x\leqslant 2$.

故不等式$|f(x)|\leqslant 2$的解集为$[1,2]$,

所以$a=1,b=2$. ……………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知$x^2+4y^2=32$,

所以$(x+2y)^2=x^2+4y^2+4xy=32+2\cdot x\cdot 2y\leqslant 32+2\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)^2$,

所以$-8\leqslant x+2y\leqslant 8$. ……………………………………………………………（6 分）

设$t=x+2y$,则$-8\leqslant t\leqslant 8$,

$x+2y-xy=x+2y-\dfrac{1}{2}x\cdot 2y\geqslant x+2y-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+2y}{2}\right)^2=t-\dfrac{t^2}{8}=-\dfrac{1}{8}(t-4)^2+2$. ………………（8 分）

因为函数$g(t)=-\dfrac{1}{8}(t-4)^2+2$在$(-8,4)$上单调递增,在$(4,8)$上单调递减,

所以$-\dfrac{1}{8}(t-4)^2+2\geqslant -\dfrac{1}{8}(-8-4)^2+2=-16$. ……………………………………（9 分）

故$x+2y-xy$的最小值为-16,当且仅当$x=-4,y=-2$时,等号成立. ………………………（10 分）