绝密★启用前

2021年高考湖南四大名校名师团队猜题卷(A)

数　学

座位号________　考生号________　姓名________

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 已知集合$A=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$,$B=\{x\mid |x|<2,x\in \mathbf{Z}\}$,则$A\cap B=$

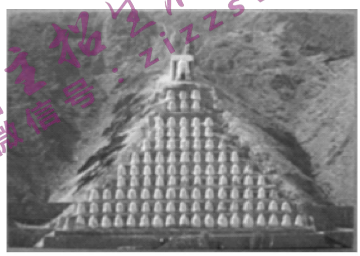
A. $\{-3\}$　B. $\{-1,1\}$

C. $\{-1,0,1\}$　D. $\{-3,-2,-1,0,1\}$

2. 若$z=\dfrac{1-2i}{i}$,则$z=$

A. $2+i$　B. $2-i$　C. $-2+i$　D. $-2-i$

3. 一百零八塔是中国现存的大型古塔群之一,位于银川市南60公里的青铜峡水库西岸崖壁下.佛塔依山势自上而下,按1、3、3、5、5、7、9、11、13、15、17、19的奇数排列成十二行.塔体分为4种类型:第1层塔身覆钵式,2~4层为八角鼓腹锥顶状,5~6层呈葫芦状,7~12层呈宝瓶状.现将一百零八塔按从上到下,从左到右的顺序依次编号1,2,3,4,…,108.则编号为26的佛塔所在层数和塔体形状分别为


一百零八塔全景

A. 第5行,呈葫芦状

B. 第6行,呈葫芦状

C. 第7行,呈宝瓶状

D. 第8行,呈宝瓶状

4. 一次表彰大会上,计划安排这5名优秀学生代表上台发言.这5名优秀学生分别来自高一、高二和高三三个年级,其中高一、高二年级各2名,高三年级1名.发言时若要求来自同一年级的学生不相邻,则不同的排法共有(　　)种.

A. 36　B. 48　C. 72　D. 120

5. 将函数 $y=\sin x-\cos x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，得到函数 $y=f(x)$的函数图象，则下列说法正确的是

A. $y=f(x)$是奇函数

B. $y=f(x)$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

C. $y=f(x)$的周期是 π

D. $y=f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递减

6. 镜片的厚度是由镜片的折射率决定，镜片的折射率越高，镜片越薄，同时镜片越轻，也就会带来更为舒适的佩戴体验. 某次社会实践活动中，甲、乙、丙三位同学分别制作了三种不同的树脂镜片，折射率分别为$\sqrt[5]{5}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt{2}$. 则这三种镜片中，制作出最薄镜片和最厚镜片的同学分别为

A. 甲同学和乙同学　　B. 丙同学和乙同学

C. 乙同学和甲同学　　D. 丙同学和甲同学

7. 有两条互相垂直的直线 XX' 和 YY'，有一条定长的线段 AB，它的两个端点分别被限制于这两条直线上. 点 P 是 AB 上的一个确定点，即点 P 到点 A 和点 B 的距离的比值是一个定值. 那么，随着线段 AB 的运动，点 P 的运动轨迹及焦距长为

A. 椭圆，焦距长为 $|AB|$

B. 椭圆，焦距长为 $2\sqrt{||PA|^2-|PB|^2|}$

C. 双曲线，焦距长为 $|2||PA|-|PB|||$

D. 双曲线，焦距长为 $2\sqrt{PA^2+PB^2}$

8. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足 $f(0)=-1$，且对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，都有 $2f(xy)+f(y)(f(x)+1)=2(x-1)$. 令集合 $A=\left\{(t,x)\,\middle|\,\frac{1}{2}t\cdot(t-f(x))=6^{2020},t\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{N}^*\right\}$，则集合 A 中的元素个数为

A. 2020　　B. 2021　　C. 4040　　D. 4042

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 某工厂生产甲、乙、丙三种不同型号的产品，产量分别为 360、240、120，为检验产品的质量，现需从以上所有产品中抽取一个容量为 60 的样本进行检验，则下列说法正确的是

A. 如果采用系统抽样的方法抽取，不需要先剔除个体

B. 如果采用分层抽样的方法抽取，需要先剔除个体

C. 如果采用系统抽样的方法抽取，抽取过程不需要运用简单随机抽样的方法

D. 如果采用分层抽样的方法抽取时，所有产品被抽中的概率相等

10. 设实数 a、b、c 满足 $b+c=6-4a+3a^2$，$c-b=4-4a+a^2$，则下列不等式成立的是

A. $c<b$　　B. $b\geqslant1$　　C. $b\leqslant a$　　D. $a<c$

11. 设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 F 在线段 A_1C_1 上运动，则下列说法正确的是

A. 若点 F 为线段 A_1C_1 的中点时，$AC_1\perp CF$

B. 若点 F 与点 A 重合时，异面直线 CF 与 B_1D_1 所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$

C. 若 $A_1F=\frac{1}{4}A_1C_1$ 时，二面角 $F-AB-A_1$ 的正切值为$\frac{1}{4}$

D. 若 F 与点 C_1 重合时，三棱锥 $C-BDF$ 外接球的表面积为 3π

12. 已知函数 $f(x)=e^x-ex$，$g(x)=x^2-x$，若关于 x 的方程 $f(x)=ag(x)$的解 $x_0\in(0,1)$，则实数 a 的可能取值为

A. $-e$　　　　B. -1　　　　C. 0　　　　D. 1

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1)$，设 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{c}|=$__________.

14. 已知$(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}x)^n$($n\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant n\leqslant12$)的展开式中有且仅有两项的系数为有理数，试写出符合题意的一个 n 的值：__________.

15. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=2$，$a_5=\frac{1}{4}$，则满足 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}\leqslant\frac{21}{2}$成立的最大正整数 n 的值为__________.

16. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$($a>0$，$b>0$)的渐近线为正方形 $OABC$ 的边 OA、OC 所在的直线，点 $F(\sqrt{2},0)$为该双曲线的右焦点，若过点 F 的直线与直线 OA、OC 的分别相交于 M、N 两点，则△OMN 内切圆半径的最大值为__________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

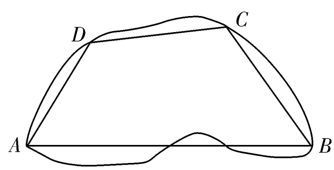
已知等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，a_6，$\frac{3}{2}$，a_7 成等差数列，且 $a_5=\frac{1}{2}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=log_a a_n$($a>0$ 且 $a\neq1$)，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n 的最值.

18. (本小题满分 12 分)

某市一湿地公园建设项目中，拟在如图所示一片水域打造一个浅水滩，并在 A、B、C、D 四个位置建四座观景台，在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{3}$千米，$AD=BC=CD=1$ 千米.

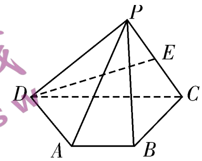


(1)用 $\cos A$ 表示 $\cos C$；

(2)现要在 A，C 两处连接一根水下直管道，已知 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{6}$，问最少应准备多少千米管道(结果可用根式表示).

19.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$AB // CD$,$\angle ABC=90^{\circ}$,$AB=1$,$BC=\sqrt{2}$,$\triangle PDC$ 是边长为 2 的等边三角形,平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$,E 为 PC 中点.



(1)设平面 $PAD \cap$ 平面 $PBC=l$,证明:$DE \perp l$

(2)求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值.

20.(本小题满分 12 分)

核酸检测是诊断新冠病毒($nCoV$)的重要标准之一,通过被检者核酸检测可以尽早发现感染者,感染者新冠病毒核酸检测呈阳性. 2020 年抗疫期间,某社区拟对其中 850 户 4 口之家以家庭为单位进行核酸检测,假定每个人核酸检测呈阳性还是阴性相互独立,且每个人核酸检测呈阳性的概率都是 $p(0<p<1)$. 在进行核酸检测时,可以逐个检测,也可以将几个样本混合在一起检测. 检测方式有三种选择:

方式一:逐个检测;

方式二:将每个 4 口之家检测样本平均分成两组后,分组混合检测;

方式三:将每个 4 口之家 4 个检测样本混合在一起检测;

其中,若混合样本 1 次检测结果呈阴性,则认为该组样本核酸检测全部呈阴性,不再检测. 若混合样本 1 次检测结果呈阳性,则对该组样本中的各个样本再逐个检测.

(1)假设某 4 口之家中有 2 个样本呈阳性,逐个检测,求恰好经过 3 次检测能把这个家庭阳性样本全部检测出来的概率;

(2)若 $p=0.01$,分别求该社区选择上述三种检测方式,对其中 850 户 4 口之家进行核酸检测次数的数学期望. 你建议选择哪种检测方式较好,请简述其实际意义(不要求证明).

(附:$0.99^2 \approx 0.98$,$0.99^3 \approx 0.97$,$0.99^4 \approx 0.96$.)

21.(本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F,点 $(m,1)$ 在抛物线 C 上,该点到原点的距离与到 C 的准线的距离相等.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点,且与以焦点 F 为圆心 1 为半径的圆交于 M,N 两点,点 B,N 在 y 轴右侧.

①证明:当直线 l 与 x 轴不平行时,$|AM| \neq |BN|$

②过点 A,B 分别作抛物线 C 的切线 l_1,l_2,l_1 与 l_2 相交于点 D,求$\triangle DAM$ 与$\triangle DBN$ 的面积之积的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ae^x-\ln(x+1)+\ln a$.

(1)当 $a=1$ 时,求函数 $y=f(x)$ 的单调区间;

(2)当 $a \in [1,+\infty)$ 时,求证:$f(x)$ 总存在唯一的极小值点 x_0,且 $f(x_0) \geq 1$.