

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(二)

文科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{y | y \geq 1\}$, $B = \{x | x^2 \leq 4\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$
 A. $[-1, 2]$ B. $[-2, 1]$ C. $[-2, 1)$ D. $[1, 2]$
2. 下列函数是偶函数的是
 A. $y = \sin 3x$ B. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ C. $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1}$ D. $y = \frac{2x \sin x}{x^2 + 1}$
3. 已知角 θ 的顶点在坐标原点,始边与 x 轴的非负半轴重合,终边经过点 $P(t, -\sqrt{t})$ ($t > 0$), 则
 A. $\cos 2\theta > 0$ B. $\cos 2\theta < 0$
 C. $\sin 2\theta > 0$ D. $\sin 2\theta < 0$
4. 在计算机尚未普及的年代,人们在计算三角函数时常常需要查表得到正弦和余弦值,三角函数表的制作最早可追溯到古希腊数学家托勒密.下面给出了正弦表的一部分,例如,通过查表可知 $2^\circ 12'$ 的正弦值为 0.038 4, $30^\circ 54'$ 的正弦值为 0.513 5, 等等. 则根据该表, 416.5° 的余弦值为

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'
0°	0.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523
.....											

(续表)

30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736
.....											

- A. 0.546 1 B. 0.551 9 C. 0.550 5 D. 0.573 6
5. 一种在恒温大棚里种植的蔬菜的株高 y (单位:cm) 与温度 x (单位:°C, $0 < x \leq 30$) 满足关系式 $y = 111.54 - \frac{10}{x}$, 市场中一吨这种蔬菜的利润 z (单位:百元) 与 x, y 的关系为 $z = 10y - x$, 则 z 的最大值为
- A. 1 095. 4 B. 995. 4 C. 990. 4 D. 895. 4
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(ax - 1), & x > 2, \\ 2^x - 3, & x \leq 2 \end{cases}$ 在定义域上单调递增, 则实数 a 的取值范围为
- A. $(0, +\infty)$ B. $[\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$ D. $[\frac{3}{2}, +\infty)$
7. “过点 $(a, 2)$ 可以作两条与曲线 $y = e^x$ 相切的直线”的充要条件是
- A. $a < \ln 2$ B. $a < 2$ C. $a > \ln 2$ D. $a > 2$
8. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi + \frac{\pi}{3})$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的一个极大值点为 $x = \frac{\pi}{6}$, 若 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上单调递增, 则 a 的最大值为
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
9. 已知函数 $y = 3\sin x$ ($\pi < x < 2\pi$) 与 $y = \frac{8}{\tan x}$ 的图象交于点 P , 过点 P 作 y 轴的平行线, 该直线与函数 $y = \sin x + 2\sqrt{2}\cos x$ 的图象交于点 Q , 则 $|PQ| =$
- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2} + 1$ C. $3 - \sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$
10. 若函数 $f(x)$ 满足: 对任意非零实数 x , 均有 $f(x) = f(-\frac{1}{x})$, 则我们称函数 $f(x)$ 为“倒数偶函数”. 若 $f(x) = \frac{(x+a)(2x+b)(x^2-x-2)}{x^2}$ 是倒数偶函数, 则 $ab =$
- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2
11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x \ln x, & 0 < x \leq 1, \\ 2f(x-1), & x > 1, \end{cases}$ 则方程 $2[f(x)]^2 + 7f(x) + 6 = 0$ 在区间 $(0, 2)$ 上的实根个数为
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 已知 $a = \ln \sqrt[3]{3}$, $b = e^{-1}$, $c = \ln(e+1) - 1$, 则
 A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $f(x) = \sqrt{\log_2 \frac{x-1}{x+1}}$ 的定义域为 _____.
14. 已知 $\sin \alpha - 2\cos \alpha = \sqrt{5}$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.
15. 已知函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 若 $f(4-x) + f(x) = 2$, 且 $f(3) = 2$, 则 $0 \leq f(x-1) \leq 2$ 的解集为 _____.
16. 已知 a, b, c 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, 且 $b\sin C + a\sin A = b\sin B + c\sin C$, 则 $\frac{b}{c}$ 的取值范围为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 再将所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $y = g(x)$ 的图象.

(I) 求 $g(x)$ 的解析式;

(II) 若函数 $\varphi(x) = |g(x)| \cos x + \sqrt{3} \cos 2x$, 求 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的所有最大值点.

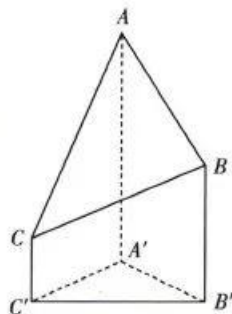
18. (12 分)

如图所示, A, B, C 是相隔不远的三座山峰的峰顶, 地理测绘员要在 A, B, C 三点进行测量. 在 C 点测得 B 点的仰角为 30° , B 与 C 的海拔高度相差 180 m; 在 B 点测得 A 点的仰角为 45° . 设 A, B, C 在同一水平面上的射影为 A', B', C' , 且 $\angle A'C'B' = \angle A'B'C' = 30^\circ$.

(I) 求 A 与 C 两点的海拔高度差.

(II) 已知该地大气压强 p (Pa) 随海拔高度 h (m) 的变化规律是 $p = p_0 e^{-kh}$ ($k = 0.000126 \text{ m}^{-1}$), p_0 是海平面大气压强. 设 A, C 两处测得的大气压强分别为 p_1, p_2 , 估计 $\frac{p_1}{p_2}$ 的值.

参考数据: $\ln 0.95565 \approx -0.04536$, $\ln 0.97758 \approx -0.02268$.



19. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{8(x+a)}{x^2+bx+4}$ 的图象关于原点对称.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间和最值;

(II) 若存在实数 x_0 满足 $e^{f(x_0)} - m = f(x_0)$, 求实数 m 的取值范围.

20. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(1 + \sin B + \cos B) \left(\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) = \frac{7}{6} \cos \frac{B}{2}$.

(I) 求 $\cos B$;

(II) 若 $a=3, c=2$, D 为边 AC 上一点, 且 $BD=AC$, 求 $\frac{AD}{DC}$ 的值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$.

(I) 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线为 l , 求 l 与坐标轴围成的三角形的面积;

(II) 若 $k < 2$, 证明: 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-6$ 仅有一个交点.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(I) 若 $a = \frac{1}{e}$, 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 若 $\forall x > 0, f(x) \geq \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln x + 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

2022—2023 学年高中毕业班阶段性测试(二)

文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查集合的表示与运算. 来源微信公众号:高三答案

解析 因为 $\complement_{\mathbb{R}}A = \{y | y > 1\}$, $B = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 所以 $(\complement_{\mathbb{R}}A) \cap B = [-2, 1)$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查函数奇偶性的判定.

解析 根据偶函数定义可判断 D 满足条件, 其余均为奇函数.

3. 答案 D

命题意图 本题考查三角函数的概念, 三角恒等变换.

解析 由题意知 $\cos \theta > 0$, $\sin \theta < 0$, 所以 $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta < 0$.

4. 答案 B

命题意图 本题考查诱导公式及其应用.

解析 由题意, $\cos 416.5^\circ = \cos 56.5^\circ = \sin 33.5^\circ = \sin 33^\circ 30'$, 查表可得 $\sin 33^\circ 30' = 0.5519$.

5. 答案 A

命题意图 本题考查函数模型, 以及基本不等式的应用.

解析 由题意知 $z = 10y - x = 1115.4 - \left(\frac{100}{x} + x\right)$, 由基本不等式可得 $\frac{100}{x} + x \geq 20$, 所以 $z \leq 1115.4 - 20 = 1095.4$,

当且仅当 $x = 10$ 时等号成立.

6. 答案 D

命题意图 本题考查分段函数的性质.

解析 根据题意 $\begin{cases} a > 0, \\ 2a - 1 \geq 0, \\ \log_2(2a - 1) \geq 2^2 - 3, \end{cases}$ 所以 $a \geq \frac{3}{2}$.

7. 答案 C

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 根据曲线 $y = e^x$ 的形状, 当点 $(a, 2)$ 在点 $(\ln 2, 2)$ 的右边时, 满足条件, 即充要条件为 $a > \ln 2$.

8. 答案 A

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 根据题意, $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, $\therefore \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$. $\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = -\frac{\pi}{6}$, \therefore 函数

$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, $\therefore x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right] (k \in \mathbb{Z})$, $\therefore f(x)$ 在区间

$[-a, a]$ 上单调递增, $\therefore a$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.

9. 答案 A

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质,三角恒等变换.

解析 设 $P(x_0, 3\sin x_0)$, 则 $3\sin x_0 = \frac{8}{\tan x_0}$, 得 $\frac{\sin^2 x_0}{\cos x_0} = \frac{8}{3}$, 即 $\frac{1 - \cos^2 x_0}{\cos x_0} = \frac{8}{3}$, 可得 $\cos x_0 = \frac{1}{3}$ (-3 舍去). 又因为 $x_0 \in (\pi, 2\pi)$, 从而 $\sin x_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 P 点的纵坐标为 $3\sin x_0 = -2\sqrt{2}$, Q 点的纵坐标为 $\sin x_0 + 2\sqrt{2}\cos x_0 = 0$, 所以 $|PQ| = 2\sqrt{2}$.

10. 答案 C

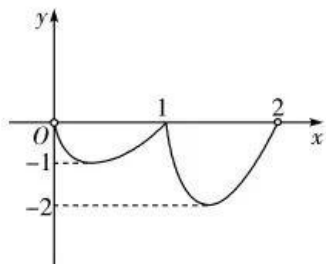
命题意图 本题考查函数的性质.

解析 由 $f(x)$ 的解析式可知 $f(-1) = 0, f(2) = 0$, 因为 $f(x)$ 是倒数偶函数, 所以 $f(1) = f(-1) = 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(2) = 0$. 又方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的两根为 -1 和 2, 所以 $(x+a)(2x+b) = 0$ 的两根为 1 和 $-\frac{1}{2}$, 所以 $(x+a) \cdot (2x+b) = (x-1)(2x+1)$, 展开对比系数可知 $ab = -1$.

11. 答案 C

命题意图 本题考查分段函数、函数图象与方程的根的问题.

解析 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = e^x \ln x$, 则 $f'(x) = e(\ln x + 1)$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $\frac{1}{e} < x \leq 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递增, 最小值为 -1. 结合函数的“周期”规律得 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的大致图象如图所示. 因为 $2[f(x)]^2 + 7f(x) + 6 = 0$, 所以 $f(x) = -2$ 或 $f(x) = -\frac{3}{2}$. 当 $f(x) = -2$ 时, 对应的 x 的值有 1 个; 当 $f(x) = -\frac{3}{2}$ 时, 对应的 x 的值有 2 个. 故 $2[f(x)]^2 + 7f(x) + 6 = 0$ 在区间 $(0, 2)$ 上的实根个数为 3.



12. 答案 B

命题意图 本题考查利用函数与导数比较大小.

解析 设函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 当 $x > e$ 时, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 又 $a = \frac{\ln 3}{3} = f(3)$, $b = \frac{\ln e}{e} = f(e)$, $\therefore a < b$. $\because \left(1 + \frac{1}{e}\right)^3 < 1.4^3 = 2.744 < 3$, $\therefore 1 + \frac{1}{e} < \sqrt[3]{3}$, $\therefore \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) < \ln \sqrt[3]{3}$, $\therefore c < a$. $\therefore c < a < b$.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案 $(-\infty, -1)$

命题意图 本题考查函数的定义域及对数函数的性质.

解析 $\because \log_2 \frac{x-1}{x+1} \geq 0, \therefore \frac{x-1}{x+1} \geq 1, \therefore x < -1, \therefore f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1)$.

14. 答案 -3

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 因为 $\sin \alpha - 2\cos \alpha = \sqrt{5}$, 所以 $\frac{\sqrt{5}}{5} \sin \alpha - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \alpha = 1$, 设 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin(\alpha - \varphi) = 1$, 所以 $\alpha - \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $\sin \alpha = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \alpha = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = -3$.

15. 答案 [2, 4]

命题意图 本题考查函数的对称性与单调性.

解析 因为 $f(4-x) + f(x) = 2$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称, 所以 $f(1) = 0$, 又 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 由 $0 \leq f(x-1) \leq 2$ 得 $1 \leq x-1 \leq 3$, 即 $2 \leq x \leq 4$.

16. 答案 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

命题意图 本题考查正弦、余弦定理以及三角恒等变换的应用.

解析 由正弦定理可得 $bc + a^2 = b^2 + c^2, \therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}, \therefore \cos A = \frac{1}{2}, \therefore 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{\pi}{3}, \therefore \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right)}{\sin C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C} + \frac{1}{2}, \therefore \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore \begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < B = \frac{2\pi}{3} - C < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \tan C > \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \frac{b}{c}$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 (I) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得 $y = 2\sin 2x$ 的图象; (2 分)

再将所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍, 得函数 $y = g(x) = 2\sin x$ 的图象.

故 $g(x) = 2\sin x$ (4 分)

(II) $\varphi(x) = |g(x)| \cos x + \sqrt{3} \cos 2x = 2|\sin x| \cos x + \sqrt{3} \cos 2x$, (5 分)

当 $x \in [0, \pi]$ 时, $\varphi(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

即当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $\varphi(x)$ 取到最大值, (7 分)

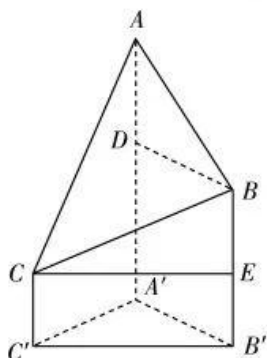
当 $x \in (\pi, 2\pi]$ 时, $\varphi(x) = -\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

即当 $x = \frac{23\pi}{12}$ 时, $\varphi(x)$ 取到最大值, (9 分)

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的所有最大值点为 $\frac{\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$ 分)

18. 命题意图 本题考查三角函数的应用以及指数函数模型.

解析 (I) 如图所示, 过 C 作 $CE \parallel C'B'$, 交 BB' 于 E , 过 B 作 $BD \parallel A'B'$, 交 AA' 于 D .



由条件知 $BE = 180, C'B' = CE = \frac{180}{\tan 30^\circ} = 180\sqrt{3}$ (2分)

在等腰三角形 $A'B'C'$ 中, 可知 $\angle C'A'B' = 120^\circ$,

则 $BD = A'B' = \frac{180\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 180$ (4分)

又在 B 点测得 A 点的仰角为 45° , 所以 $AD = BD = 180$, (6分)

所以 A 与 C 两点的海拔高度差为 $AD + BE = 180 + 180 = 360$ (m). (8分)

(II) 设 A, C 两处的海拔高度分别为 h_1, h_2 , 则 $h_2 - h_1 = -360$,

则 $\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_0 e^{0.000126h_1}}{p_0 e^{-0.000126h_2}}$ (10分)

$= e^{0.000126(h_2 - h_1)} = e^{-0.04536} \approx 0.95565$,

故 $\frac{p_1}{p_2}$ 的值约为 0.95565 (12分)

19. 命题意图 本题考查函数的基本性质, 导数的应用.

解析 (I) 根据题意得 $f(-x) + f(x) = 0, \therefore \frac{8(-x+a)}{(-x)^2 - bx + 4} + \frac{8(x+a)}{x^2 + bx + 4} = 0$, (1分)

$\therefore (a-b)x^2 + 4a = 0$, 所以 $a = b = 0$, 故 $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$, (2分)

$\therefore f'(x) = \frac{8(2-x)(2+x)}{(x^2 + 4)^2}$, (3分)

列表可得:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递减	极小值 -2	单调递增	极大值 2	单调递减

即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(2, +\infty)$, 单调递增区间为 $(-2, 2)$ (4分)

又当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$,

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-2) = -2$, 最大值为 $f(2) = 2$ (6分)

(II) 易知 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$, 令 $f(x_0) = t$, 条件转化为: 存在 $t \in [-2, 2]$, 使得 $t = \frac{8x}{x^2 + 4} = m$ 成立.

设 $g(t) = e^t - t$, 则 $g'(t) = e^t - 1$, (7分)

则当 $-2 \leq t < 0$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 单调递减, 当 $0 < t \leq 2$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调递增,

$\therefore g(t)_{\min} = g(0) = 1$, (9分)

又 $g(-2) = 2 + e^{-2}$, $g(2) = e^2 - 2$, $e^2 - 2 > 2 + e^{-2}$, (10分)

$\therefore 1 \leq g(t) \leq e^2 - 2$, $\therefore 1 \leq m \leq e^2 - 2$,

即实数 m 的取值范围为 $[1, e^2 - 2]$ (12分)

20. 命题意图 本题考查正、余弦定理和三角恒等变换的应用.

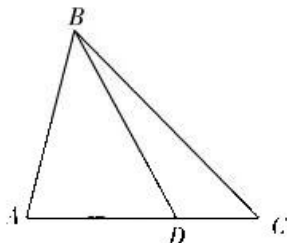
解析 (I) $(1 + \sin B + \cos B) \left(\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) = \left(2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + 2 \cos^2 \frac{B}{2} \right) \left(\cos \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \right)$ (2分)

$= 2 \cos \frac{B}{2} \left(\cos^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{B}{2} \right) = 2 \cos \frac{B}{2} \cos B = \frac{7}{6} \cos \frac{B}{2}$ (4分)

$\because 0 < B < \pi$, $\therefore \cos B = \frac{7}{12}$ (5分)

(II) 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 9 + 4 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{7}{12} = 6$,

$\therefore BD = AC = \sqrt{6}$ (7分)



$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6 + 4 - 9}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{24}$ (8分)

在 $\triangle ABD$ 中, 设 $AD = m, m > 0$,

则 $\cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \times AD} = \frac{4 + m^2 - 6}{4m} = \frac{\sqrt{6}}{24}$ (9分)

整理可得 $m^2 - \frac{\sqrt{6}}{6}m - 2 = 0$, 解得 $m = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (负值舍去). (10分)

即 $AD = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 所以 $DC = AC - AD = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore \frac{AD}{DC} = 2$ (12分)

21. 命题意图 本题考查导数的几何意义, 以及利用导数研究函数性质.

解析 (I) 由已知得 $f'(x) = 3x^2 - 10x + 5$, $\therefore f'(3) = 2$ (1分)

又 $f(3) = 0$, $\therefore l$ 的方程为 $y = 2(x - 3)$, (3分)

$\therefore l$ 与 x 轴的交点为 $(3, 0)$, 与 y 轴的交点为 $(0, -6)$, (4分)

$\therefore l$ 与坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$ (5分)

(II) 设 $g(x) = f(x) - kx + 6 = x^3 - 5x^2 + (5 - k)x + 9$.

当 $x \leq 0$ 时, $g'(x) = 3x^2 - 10x + 5 - k > 0$, $g(x)$ 单调递增.)



又 $g(-1) = k - 2 < 0, g(0) = 9 > 0,$

$\therefore g(x) = 0$ 在 $(-\infty, 0]$ 上有唯一实根. (7分)

当 $x > 0$ 时, 设 $h(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9,$ 则 $g(x) = h(x) + (2-k)x > h(x).$ (8分)

$h'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = (x-3)(3x-1),$

可得 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 和 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{3}, 3)$ 上单调递减. (10分)

又 $h(0) = 9 > 0, h(3) = 0,$

\therefore 当 $x > 0$ 时, $g(x) > h(x) \geq h(3) = 0, \therefore g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有实根. (11分)

综上, $g(x) = 0$ 在 \mathbf{R} 上有唯一实根, 即曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = kx - 6$ 仅有一个交点. (12分)

22. 命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 (I) 若 $a = \frac{1}{e},$ 则 $f(x) = \frac{e^x}{e} - \ln x,$

$f'(x) = \frac{e^x}{e} - \frac{1}{x}, x > 0.$ (2分)

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f'(1) = 0,$ (3分)

\therefore 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0,$ 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0,$ (4分)

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1.$ (5分)

(II) $\forall x > 0, f(x) \geq (\frac{1}{x} - 1) \ln x + 1$ 恒成立, 即 $ae^x \geq \frac{\ln x}{x} + 1$ 恒成立,

令 $x = 1,$ 得 $ae \geq 1, \therefore a \geq \frac{1}{e}.$ (6分)

下面证明: 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 且 $x > 0$ 时, $ae^x \geq \frac{\ln x}{x} + 1$ 恒成立. (*)

设 $g(x) = e^{x-1} - x,$ 则 $g'(x) = e^{x-1} - 1,$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0,$ 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0,$

$\therefore g(x) \geq g(1) = 0,$ 即 $e^{x-1} \geq x.$

$\therefore a \geq \frac{1}{e}, \therefore ae^x \geq e^{x-1} \geq x.$ (8分)

要证明 $ae^x \geq \frac{\ln x}{x} + 1,$ 只需证明 $x \geq \frac{\ln x}{x} + 1,$ 即证明 $x^2 - \ln x - x \geq 0,$ (9分)

令 $h(x) = x^2 - \ln x - x,$ 则 $h'(x) = 2x - \frac{1}{x} - 1 = \frac{2x^2 - x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}, x > 0,$ (10分)

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0,$ 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0,$

$\therefore h(x) \geq h(1) = 0.$ 从而命题(*)成立. (11分)

综上所述, a 的取值范围是 $[\frac{1}{e}, +\infty).$ (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

