巴东县第三高级中学高二下第四次月考·数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　由题意，得 $A\cap B=\{x\,|\,0<x\leqslant 3\}\cap\{x\,|\,2<x<6\}=\{x\,|\,2<x\leqslant 3\}$. 故选 C.

2. C　由随机变量 X 服从两点分布，得 $P(X=1)+P(X=0)=1$，又 $P(X=1)=\frac{3}{2}P(X=0)$，所以 $P(X=1)=\frac{3}{5}$. 故选 C.

3. D　由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，由 $f(\log_2 x)>f(1)$，得 $\log_2 x>1$，解得 $x>2$，所以不等式 $f(\log_2 x)>f(1)$ 的解集为 $(2,+\infty)$. 故选 D.

4. B　先将不含甲、乙的 4 人排列，有 A_4^4 种，再在 4 人之间及首尾 5 个空位中任选 2 个空位安排甲、乙，有 A_5^2 种，所以甲、乙两人不相邻的不同的排法有 $\mathrm{A}_4^4\mathrm{A}_5^2=24\times 20=480$(种). 故选 B.

5. D　由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$，$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ 上不单调递增，在 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增. 故选 D.

6. B　由 $X\sim B(n,p)$，得 $E(X)=np,D(X)=np(1-p)$，所以 $E(Y)=3E(X)+1=3np+1=7,D(Y)=3^2D(X)=9np(1-p)=12$，解得 $p=\frac{1}{3}$. 故选 B.

7. A　方案一：每个舱各安排 2 人，共有 $\frac{\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{A}_3^3}\cdot\mathrm{A}_3^3=90$(种)不同的方案；方案二：分别安排 3 人，2 人，1 人，共有 $\mathrm{C}_6^3\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_1^1\mathrm{A}_3^3=360$(种)不同的方案. 所以共有 $90+360=450$(种)不同的安排方案. 故选 A.

8. D　设 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$，所以 $f\left(-\frac{1}{2\ 023}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\ 023}}-\frac{2\ 022}{2\ 023}>0$，即 $a>b$. 设 $g(x)=x-(1+\ln x)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$，所以 $g\left(\frac{2\ 022}{2\ 023}\right)=\frac{2\ 022}{2\ 023}-\left(1+\ln\frac{2\ 022}{2\ 023}\right)>0$，即 $b>c$. 综上所述，$c<b<a$. 故选 D.

9. ACD　由复数 z 对应的点为 $(-1,2)$，得 $z=-1+2\mathrm{i}$，所以 $z+\bar{z}=-1+2\mathrm{i}-1-2\mathrm{i}=-2$，故 A 正确；$z^2=(-1+2\mathrm{i})^2=1-4\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=-3-4\mathrm{i}$，故 B 错误；$z\bar{z}=(-1+2\mathrm{i})(-1-2\mathrm{i})=5$，故 C 正确；$\frac{z}{1-\mathrm{i}}=\frac{(-1+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，故 D 正确. 故选 ACD.

10. ABD　设等比数列 $\{3^{a_n}\}$ 的公比为 q，则 $\frac{3^{a_{n+1}}}{3^{a_n}}=3^{a_{n+1}-a_n}=q>0$，所以 $a_{n+1}-a_n=\log_3 q$(定值)，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列，故 A 正确；设等差数列 $\{\ln a_n\}$ 的公差为 d，则 $\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\mathrm{e}^d$(定值)，所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，故 B 正确；当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=6$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1$，所以 $a_2-a_1\neq a_3-a_2$，所以 $\{a_n\}$ 不是等差数列，故 C 错误；当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2\times 3^{n-1}$，所以 $a_n=2\times 3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$(定值)，所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABD　对于 A，因为第 4 项与第 7 项的二项式系数相等，所以 $\mathrm{C}_n^3=\mathrm{C}_n^6$，由组合数的性质知 $n=9$，故 A 正确；对于 B，在 $\left(x^2+\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的展开式中，令 $x=1$，得 $(1+a)^9=0$，所以 $a=-1$，所以 $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$ 的二项式通项

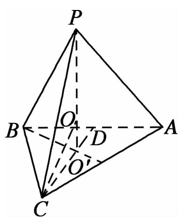
为 $T_{k+1}=(-1)^k C_9^k \cdot x^{18-\frac{5}{2}k}$. 由 $18-\frac{5}{2}k$ 为整数，得 $k=0,2,4,6,8$，所以展开式中有理项有 5 项，故 B 正确；对于 C，展开式中偶数项的二项式系数和为 $C_9^1+C_9^3+\cdots+C_9^9=2^8=256$，故 C 错误；对于 D，$(7-a)^n=(7+1)^9=8^9=(9-1)^9=C_9^0 9^9-C_9^1 9^8+\cdots+C_9^8 9-1=9(C_9^0 9^8-C_9^1 9^7+\cdots+C_9^8-1)+8$，所以 $(7-a)^n$ 除以 9 余 8，故 D 正确. 故选 ABD.

12. AD　若用方案甲，设化验次数为 X，则 X 的可能取值为 1,2,3,4,5,6,7，所以 $P(X=1)=\frac{1}{8}$，$P(X=2)=\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{8}$，A 正确；若用方案乙，设化验次数为 Y，若 $Y=3$，有两种情况：①头 4 只均为阴性，则 $P_1=\frac{C_7^4}{C_8^4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$；②头 4 只有阳性，则 $P_2=\frac{C_7^3C_1^1}{C_8^4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$，所以化验次数为 3 次的概率为 $P(Y=3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$，B 错误；若用方案甲，则 $P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=P(X=6)=\frac{1}{8}$，$P(X=7)=1-\frac{6}{8}=\frac{1}{4}$，所以 $E(X)=(1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{8}+7\times\frac{1}{4}=\frac{35}{8}$，C 错误；若用方案乙，$Y$ 可取 2,3,4，$P(X=2)=\frac{C_7^4}{C_8^4}\times\frac{1}{4}+\frac{C_7^3C_1^1}{C_8^4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，$P(Y=3)=\frac{1}{4}$，$P(Y=4)=1-\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$，所以 $E(Y)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{2}=\frac{13}{4}$，因为 $E(X)>E(Y)$，所以方案乙比方案甲好，D 正确. 故选 AD.

13. 0.82　由正态分布的对称性知 $P(X\leqslant7)=1-P(X>7)=1-P(X<1)=1-0.18=0.82$.

14. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $2\sin\alpha+\cos\alpha=0$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $5\sin^2\alpha=1$，又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

15. $\frac{64\sqrt{6}}{27}\pi$　当肉丸的体积最大时，肉丸所成的球是该正四面体的内切球，如图，设正四面体的高为 h，内切球的半径为 r，所以 $CD=4\sqrt{3}$，$CO'=\frac{2}{3}CD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，所以 $h=PO'=\frac{8\sqrt{6}}{3}$，所以正四面体的表面积为 $S=4\times\frac{1}{2}\times8\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=64\sqrt{3}$，根据等体积法，得 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}rS$，



即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times8\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{8\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}rS$，解得 $r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，所以 $V=\frac{4\pi}{3}r^3=\frac{64\sqrt{6}}{27}\pi$，即肉丸的体积的最大值为 $\frac{64\sqrt{6}}{27}\pi\ \text{cm}^3$.

16. $(x+4)^2+y^2=12$(2 分)　$[-8,32]$(3 分)　设 (x,y) 是圆 C 上的任意一点，则 $\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}=\sqrt{3}$，化简得圆 C 的方程为 $(x+4)^2+y^2=12$. 圆心 C 的坐标为 $(-4,0)$，半径为 $2\sqrt{3}$，由题意知 $PM\perp CM$，$PN\perp CN$，所以 $|PM|=|PN|=\sqrt{|PC|^2-12}$，$S_{PMCN}=2\times\frac{1}{2}|PM|\cdot|CM|=\sqrt{|PC|^2-12}\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，解得 $|PC|=4$. 又点 P 在直线 l：$3x+4y+m=0$ 上，所以 $|PC|$ 不小于 C 到直线 l 的距离，即 $4\geqslant d=\frac{|-12+m|}{5}$，解得 $-8\leqslant m\leqslant32$，即实数 m 的取值范围是 $[-8,32]$.

17. (1)解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_3+2a_4=30$，$S_8=100$，所以 $\begin{cases}a_1+2d+2(a_1+3d)=30,\\ 8a_1+\frac{8\times7d}{2}=100,\end{cases}$ ……… 2 分

解得 $a_1=2$，$d=3$， ……………………………………………… 4 分

所以 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$. ……………………………………… 5 分

(2)证明：$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{3(3n+2)}$.

…………………………………………………………………………………………………… 8 分

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以$\frac{1}{3(3n+2)}>0$，所以$\frac{1}{6}-\frac{1}{3(3n+2)}<\frac{1}{6}$，

即$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{6}$. ………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，得 $a-c=2c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-b^2}{a}$，即 $b^2=c^2+ac$，……… 3 分

又 $b=4\sqrt{3}$，$c=3\sqrt{2}$，所以$(4\sqrt{3})^2=(3\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}a$，解得 $a=5\sqrt{2}$. …………………………………… 6 分

(2)因为 $a-c=2c\cdot\cos B$，所以由正弦定理，得 $\sin A-\sin C=2\sin C\cdot\cos B$，……………………… 8 分

由 $A=\frac{\pi}{2}$，得 $B+C=\frac{\pi}{2}$，$\sin A=1$，$\cos B=\sin C$，

所以 $1-\sin C=2\sin^2 C$，即$(2\sin C-1)\cdot(\sin C+1)=0$，…………………………………………… 10 分

所以 $\sin C=\frac{1}{2}$或 $\sin C=-1$(舍去)，又 $0<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………… 12 分

19. 解：(1)设"选出的 4 名同学中有男生"为事件 A，则 $P(A)=1-\frac{C_4^4}{C_8^4}=\frac{69}{70}$. ……………………………… 4 分

(2)随机变量 X 的所有取值为 0，1，2，3，4，……………………………………………………………… 6 分

所以 $P(X=0)=\frac{C_4^4}{C_8^4}=\frac{1}{70}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1C_4^3}{C_8^4}=\frac{8}{35}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}=\frac{18}{35}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3C_4^1}{C_8^4}=\frac{8}{35}$，$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_8^4}=\frac{1}{70}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{70}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{70}$

…………………………………………………………………………………………………… 10 分

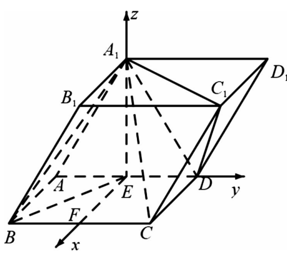
$E(X)=0\times\frac{1}{70}+1\times\frac{8}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{8}{35}+4\times\frac{1}{70}=2$. …………………………………… 12 分

20. (1)证明：因为 $A_1A=A_1D$，点 E 是 AD 的中点，所以 $A_1E\perp AD$，……………………………………… 1 分

又平面 $AA_1D_1D\perp$平面 $ABCD$，平面 $AA_1D_1D\cap$平面 $ABCD=AD$，$A_1E\subset$平面 AA_1D_1D，所以 $A_1E\perp$平面 $ABCD$. ……………………………………………………………………………………… 4 分

又 $A_1E\subset$平面 A_1EB，所以平面 $A_1EB\perp$平面 $ABCD$. …………………………………………………… 6 分

(2)解：取 BC 的中点 F，连结 EF，则四边形 $CDEF$ 为正方形，所以 $EF\perp AD$，以 E 为坐标原点，EF，ED，EA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系如图所示，则$B(1,-1,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，



所以$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BA_1}=(-1,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-\sqrt{3})$. ………… 8 分

设平面 A_1BC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则有

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2y=0,\\ -x+y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=0$，$x=\sqrt{3}$，所以平面 A_1BC 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,1)$，……………………………… 10 分

设直线 A_1D 与平面 A_1BC 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{A_1D}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{A_1D}|}=\frac{|-\sqrt{3}|}{2\times2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

即直线 A_1D 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，……………………………………………………………… 1 分

由$\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $8+4\sqrt{2}$，得 $2a+2c=8+4\sqrt{2}$，所以 $a=4$，$c=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}$. ……………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)直线 AB 的斜率是定值，证明如下：

因为 P 是椭圆 C 上一点且在第四象限，$PF_2\perp F_1F_2$，所以设 $P(2\sqrt{2},y_0)(y_0<0)$，代入椭圆 C 的方程，得 $y_0=-2$，即$P(2\sqrt{2},-2)$.

设直线 AP 的方程为 $y+2=k(x-2\sqrt{2})$，与椭圆 C 的方程联立，得$(1+2k^2)x^2-(8\sqrt{2}k^2+8k)x+16k^2+16\sqrt{2}k-8=0$，

所以 $2\sqrt{2}x_A=\frac{16k^2+16\sqrt{2}k-8}{1+2k^2}$，即 $x_A=\frac{4\sqrt{2}k^2+8k-2\sqrt{2}}{1+2k^2}$. ………………………………………… 6 分

因为 PA，PB 的倾斜角互补，所以直线 BP 的方程为 $y+2=-k(x-2\sqrt{2})$，同理得 $x_B=\frac{4\sqrt{2}k^2-8k-2\sqrt{2}}{1+2k^2}$.

……… 8 分

因为 $y_A+2=k(x_A-2\sqrt{2})$，$y_B+2=-k(x_B-2\sqrt{2})$，

所以 $k_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{k(x_A-2\sqrt{2})+k(x_B-2\sqrt{2})}{x_A-x_B}=\frac{k(x_A+x_B-4\sqrt{2})}{x_A-x_B}=\frac{-\frac{8\sqrt{2}k}{1+2k^2}}{\frac{16k}{1+2k^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因此直线 AB 的斜率为定值$-\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $f'(x)=e^x+a$，得 $k=f'(0)=1+a$，又切线与直线 l：$x-2y+4=0$ 垂直，所以 $k=-2$，即 $a=-3$. …………………………………………………………………………………………………… 2 分

所以 $f'(x)=e^x-3$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 3$，

当 $x<\ln 3$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>\ln 3$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,\ln 3)$，单调递增区间为$(\ln 3,+\infty)$. ……………………………… 5 分

(2)对任意实数 x，$f(x)\geqslant -x^2-3+2b$ 恒成立，即对任意实数 x，$e^x+x^2-3x+3\geqslant 2b$ 恒成立.

设 $g(x)=e^x+x^2-3x+3$，即 $b\leqslant\frac{1}{2}g(x)_{\min}$. ………………………………………………………… 6 分

$g'(x)=e^x+2x-3$，令 $h(x)=g'(x)=e^x+2x-3$，所以 $h'(x)=e^x+2>0$ 恒成立，所以 $g'(x)=e^x+2x-3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$g'(1)=e-1>0$，所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}+2x_0-3=0$，

所以 $e^{x_0}=3-2x_0$. ……………………………………………………………………………………… 8 分

当 $x\in(-\infty,x_0)$时，$g'(x_0)<0$，$g(x)$单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x_0)>0$，$g(x)$单调递增.

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-3x_0+3=3-2x_0+x_0^2-3x_0+3=x_0^2-5x_0+6=\left(x_0-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，……

……… 10 分

当 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$2<x_0^2-5x_0+6<\frac{15}{4}$，

所以$\frac{1}{2}g(x_0)\in\left(1,\frac{15}{8}\right)$，由题意知 $b\leqslant\frac{1}{2}g(x_0)$且 $b\in\mathbf{Z}$，

所以 $b\leqslant 1$，即整数 b 的最大值为 1. …………………………………………………………… 12 分