A10联盟2024届高

数学

巢湖一中　合肥八中　淮南二中　六安一中　南陵中学
滁州中学　池州一中　阜阳一中　灵璧中学　宿城一中

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分

第Ⅰ卷　选择题（共60分）

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

1. 已知$(1-\mathrm{i})x+(1+\mathrm{i})y=1-3\mathrm{i}$，$x,y\in\mathbf{R}$，则$x-y=$（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 3　　D. -3

2. 已知集合$A=\{x|x=3k-4,k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|y=\ln(-x^2+x+12)\}$，则$A\cap B$的元素个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

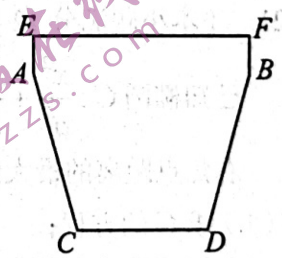
3. 设$a=2^{\log_3\frac{1}{2}}$，$b=\log_2 5$，$c=\log_3 5$，则（　　）

A. $c<a<b$　　B. $b<c<a$　　C. $a<b<c$　　D. $a<c<b$

4. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线与直线$x-2y-1=0$垂直，则$C$的离心率为（　　）

A. $\sqrt{6}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

5. 夏日炎炎，某奶茶店推出了新款奶茶——“冰桶”系列，受到了年轻消费者的喜爱，已知该系列奶茶的容器可以看作是一个圆台与一个圆柱拼接而成，其轴截面如图所示，其中$EF=20\text{ cm}$，$CD=14\text{ cm}$，$AE=3\text{ cm}$，$AC=3\sqrt{26}\text{ cm}$，则该容器的容积为（　　）（不考虑材料厚度）



A. $1265\pi\text{ cm}^3$　　B. $1365\pi\text{ cm}^3$

C. $1295\pi\text{ cm}^3$　　D. $1395\pi\text{ cm}^3$

6. 2023年7月28日晚，第31届世界大学生夏季运动会在成都盛大开幕．为宣传成都大运会，某大学团委开展了“阳光灿烂　青春与共”大运会知识竞赛活动，各班以团支部为单位参加比赛，某班团支部在6道题中(包含4道图片题和2道视频题)，依次不放回地随机抽取2道题作答，设事件A为“第1次抽到图片题”，事件B为“第2次抽到视频题”，则$P(B|\overline{A})=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

7. 已知平面区域$\Omega_1=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant1\}$，$\Omega_2=\{(x,y)|x^4+y^2\leqslant1\}$，$\Omega_3=\{(x,y)||x|+|y|\leqslant1\}$，记$\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$的面积分别为$S_1,S_2,S_3$，则（　　）

A. $S_3<S_1<S_2$　　B. $S_3<S_2<S_1$　　C. $S_2<S_3<S_1$　　D. $S_2<S_1<S_3$

高三上学期8月底开学摸底考

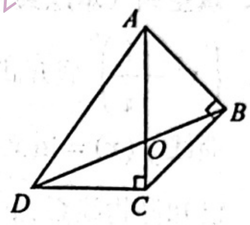
学试题

舒城中学　太湖中学　天长中学　屯溪一中　宣城中学

合肥六中　太和中学　合肥七中　科大附中　野寨中学

部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

8. 古希腊数学家特埃特图斯（Theaetetus）利用如图所示的直角三角形来构造无理数. 已知 $AB=BC=CD=1$，$AB\perp BC, AC\perp CD$，AC 与 BD 交于点 O，若 $\overrightarrow{DO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，则 $\lambda+\mu=$（　　）



A. $\sqrt{2}-1$　　B. $1-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}+1$　　D. $-\sqrt{2}-1$

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 电影《八角笼中》是由王宝强导演并参演的一部电影，讲述了年轻人为理想而努力奋斗的故事. 该电影一上映就引起了广大观众的热议，票房也超出了预期，现随机抽取若干名观众进行调查，所得数据统计如下表所示，则（　　）

	喜欢该电影	不喜欢该电影
男性观众	160	40
女性观众	140	60

A. 若在被调查的观众中随机抽取 1 人，则抽到喜欢该电影的男性观众的概率为 $\frac{2}{5}$

B. 在被调查的观众中，男性不喜欢该电影的比例高于女性

C. 根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可以认为被调查观众的性别与对电影的喜爱程度有差异

D. 根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，可以认为被调查观众的性别与对电影的喜爱程度有差异

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.01	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	10.828

10. 已知直线 $l: mx-y-m+3=0(m\in\mathbf{R})$ 及圆 $C:(x-2)^2+(y-4)^2=3$，则（　　）

A. 直线 l 过定点　　B. 直线 l 截圆 C 所得弦长最小值为 2

C. 存在 m，使得直线 l 与圆 C 相切　　D. 存在 m，使得圆 C 关于直线 l 对称

11. 已知函数 $f(x)=\left|\sin(\pi x-\pi)\right|+\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{3\pi}{2}\right)$，则（　　）

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称

C. $f(x)$ 的最小正周期为 2　　D. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增

12. 已知首项为$\frac{1}{2}$的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，其中$S_{n+1}=S_n+a_n+\frac{a_n^2}{2023}$，记数列$\{1-a_n\}$的前$n$项积为$T_n$，则（　　）

A. $a_2<\frac{2}{3}$　　　　B. $\exists k\in N^*$，$a_{k+1}<a_k$

C. $T_{2024}>0$　　　　D. 使得$T_k<0$成立的最小正整数k的值为2025

第Ⅱ卷　非选择题(共 90 分)

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．）

13. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$展开式中的常数项为__________.（用数字作答）

14. 曲线$f(x)=\ln x+2f'(1)x$在点$(1,f(1))$处的切线方程为__________.

15. 已知抛物线$C:y^2=8x$与直线$l:\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$交于$M,N$两点（点$M$在第一象限），$C$的焦点为$F$，则$|MF|=$__________.

16. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的所有顶点均在一个表面积为12π的球面上，空间内的一点E满足$AE\perp B_1D_1$，$AE\perp A_1D$，若$A_1B\subset$平面α，$AE//$平面α，且$B_1C_1\cap$平面$\alpha=F$，则CF的长为__________.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

17. （本小题满分 10 分）

$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$2\sin^2 B+2\sin^2 C+2\sin B\sin C+\cos\left[2(B+C)\right]=1$，$\angle A$的平分线交$BC$边于$D$，过$D$作$DE\perp AC$，垂足为点$E$.

（1）求角A的大小；

（2）若$b=2,c=4$，求AE的长.

18. （本小题满分 12 分）

某公司使用甲、乙两台机器生产芯片，已知每天甲机器生产的芯片占产量的六成，且合格率为94%；乙机器生产的芯片占产量的四成，且合格率为95%，已知两台机器生产芯片的质量互不影响.现对某天生产的芯片进行抽样.

（1）从所有芯片中任意抽取一个，求该芯片是不合格品的概率；

（2）现采用有放回的方法随机抽取3个芯片，记其中由乙机器生产的芯片的数量为X，求X的分布列以及数学期望$E(X)$.

19. （本小题满分 12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=14, a_9=2a_4+6$，数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，$b_1=1$，且数列$\left\{2-\dfrac{S_n}{b_n}\right\}$是公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列.

（1）求数列$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式；

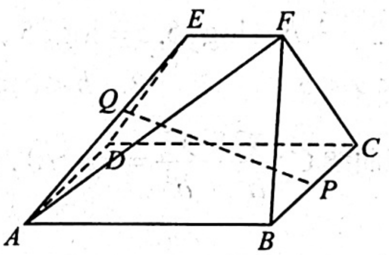
（2）若$c_n=a_n\cdot b_n$，记数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n，试比较T_n与$(4n-6)\cdot 2^n+14$的大小.

20. （本小题满分 12 分）

如图，在五面体$ABCDEF$中，底面$ABCD$为正方形，侧面$CDEF$为等腰梯形，二面角$E-CD-A$为直二面角，$AB=2EF=4$，$AF=3\sqrt{3}$.

（1）求点F到平面$ABCD$的距离；

（2）设点P为线段BC的中点，点Q满足$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AE}(\lambda>0)$，若直线$PQ$与平面$ADE$及平面$ABCD$所成的角相等，求$\lambda$的值.



21. （本小题满分 12 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点到右顶点的距离为$\sqrt{7}$，点$M$在$C$上，且点$M$到右焦点距离的最大值为 3，过点$P(0,2)$且不与$x$轴垂直的直线$l$与$C$交于$A,B$两点.

（1）求C的方程；

（2）记O为坐标原点，求$\triangle AOB$面积的最大值.

22. （本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=e^x-m\sin x(m\in\mathbf{R})$.

（1）若$f(x)$在$\left[-\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上恰有2个零点，求$m$的取值范围；

（2）若$m>0,n<0$，$g(x)=f(x)+nx+\sqrt{2}m$，x_0是$g'(x)$的零点（$g'(x)$是$g(x)$的导数），求证：$g(x_0)+n\ln 2\geqslant n\ln(-n)$.

A10联盟2024届高三上学期8月底开学摸底考

数学参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	B	D	C	A	A

1. C　因为 $(1-\mathrm{i})x+(1+\mathrm{i})y=x+y+(y-x)\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$，所以 $x-y=3$，故选 C.

2. B　由题意得，$A=\{-4,-1,2,5,\cdots\}$，$B=\{x|-3<x<4\}$，故 $A\cap B=\{-1,2\}$，故选 B.

3. D　因为 $\log_3\frac{1}{2}<0$，所以 $0<a<1$，又 $b=\log_2 5>\log_2 4=2,1=\log_3 3<c=\log_3 5<\log_3 9=2$，所以 $a<c<b$. 故选 D.

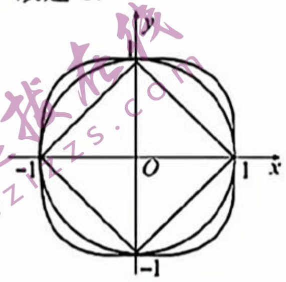
4. B　由题意得，$\frac{b}{a}=2$，则 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$.故选 B.

5. D　由题意得，圆台的高 $h=\sqrt{AC^2-\left(\frac{AB-CD}{2}\right)^2}=15\text{ cm}$，故该容器的容积

$V=\pi\times10^2\times3+\frac{1}{3}\times\left(\pi\times10^2+\pi\times7^2+\pi\times10\times7\right)\times15=1395\pi\left(\text{cm}^3\right)$，故选 D.

6. C　因为 $P(A)=\frac{A_4^1}{A_6^1}=\frac{2}{3}$，$P(\overline{A}B)=\frac{A_2^2}{A_6^2}=\frac{1}{15}$，所以 $P(B\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{1}{5}$. 故选 C.

7. A　分别作出曲线 $|x|+|y|=1$，$x^2+y^2=1$，$x^4+y^2=1$ 的大致图形如图所示（先作出第一象限的图形，再由对称性作出全部图形），观察可知，$S_3<S_1<S_2$，故选 A.



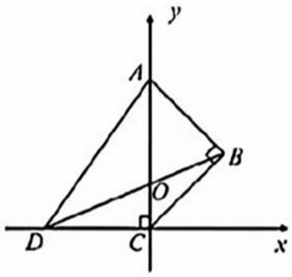
8. A　以 C 为坐标原点，CD,CA 所在直线分别为 x,y 轴建立如图所示的坐标系，

则 $A(0,\sqrt{2})$，$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$C(0,0)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AC}=(0,-\sqrt{2})$.因为 $CB=CD=1,\angle DCB=135°$，故 $\angle BDC=22.5°$，

因为 $\tan45°=\frac{2\tan22.5°}{1-\tan^2 22.5°}=1$，所以 $\tan22.5°=\sqrt{2}-1$（负值舍去），

故 $O(0,\sqrt{2}-1)$. 又 $D(-1,0)$，则 $\overrightarrow{DO}=(1,\sqrt{2}-1)$，因为



$\overrightarrow{DO}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以 $\begin{cases}1=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\\ \sqrt{2}-1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda-\sqrt{2}\mu\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=\sqrt{2}\\ \mu=-1\end{cases}$，

所以 $\lambda+\mu=\sqrt{2}-1$. 故选 A.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

题号	9	10	11	12
答案	AC	ABD	AB	ACD

9. AC　因为 $\frac{160}{400}=\frac{2}{5}$，故 A 正确；因为 $\frac{60}{200}>\frac{40}{200}$，故 B 错误；

$\chi^2=\frac{400\times(160\times60-140\times40)^2}{300\times100\times200\times200}=\frac{16}{3}\approx5.333$，因为 $5.333>3.841$，$5.333<6.635$，故 C 正确，D 错误．故选 AC.

10. ABD　由 $l: mx-y-m+3=0\Rightarrow m(x-1)+(3-y)=0$，得 $\begin{cases}x-1=0\\3-y=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$，所以直线 l 过定点为 $(1,3)$，故 A 正确；由圆的标准方程可得圆心为 $C(2,4)$，半径 $r=\sqrt{3}$，直线 l 过的定点为 $M(1,3)$，当 $l\perp CM$ 时，直线 l 截圆 C 所得弦长最短，因为 $CM=\sqrt{2}$，则最短弦长为 $2\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=2$，故 B 正确；因为点 $M(1,3)$ 在圆 C 内，所以直线 l 与圆 C 一定相交，故 C 错误；当直线 l 过圆心 C 时，满足题意，此时 $2m-4-m+3=0$，解得 $m=1$，故 D 正确．故选 ABD.

11. AB　由 $f(x)=|\sin(\pi x-\pi)|+\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{3\pi}{2}\right)=|\sin\pi x|-\cos\frac{\pi x}{2}$，知 $f(-x)=|\sin\pi x|-\cos\frac{\pi x}{2}$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 A 正确；因为

$f(4-x)=|\sin(4\pi-\pi x)|-\cos\left(2\pi-\frac{\pi x}{2}\right)=|\sin\pi x|-\cos\frac{\pi x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，故 B 正确；因为 $f(0)=-1, f(2)=1$，则 $f(0)\neq f(2)$，所以 2 不是 $f(x)$ 的周期，故 C 错误；因为 $f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $f(1)<f\left(\frac{1}{2}\right)$，故 D 错误.故选 AB.

12. ACD　由题意得，$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2}{2023}$，故 $a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2023\times4}<\frac{2}{3}$，故 A 正确；$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2}{2023}>0$，故数列 $\{a_n\}$ 单调递增，故 B 错误；$T_n=(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)$，

$a_{n+1}=\frac{2023a_n+a_n^2}{2023}=\frac{(2023+a_n)a_n}{2023}$，故 $\frac{1}{a_n+2023}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}$，累加可得

$\sum_{i=1}^{2023}\frac{1}{a_i+2023}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2024}}$，即 $\frac{1}{a_{2024}}=2-\sum_{i=1}^{2023}\frac{1}{a_i+2023}>2-2023\times\frac{1}{\frac{1}{2}+2023}>1$，则

$a_{2024}<1$，由数列 $\{a_n\}$ 单调递增，得 $\frac{1}{2}=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{2024}<1$，所以 $T_{2024}>0$，故 C 正确；因为 $\frac{1}{a_{2025}}=2-\sum_{i=1}^{2024}\frac{1}{a_i+2023}<2-2024\times\frac{1}{1+2023}=1$，所以 $a_{2025}>1$，所以 $T_{2025}=T_{2024}\cdot(1-a_{2025})<0$，所以使得 $T_k<0$ 成立的最小正整数 k 的值为 2025，故 D 正确．故选 ACD.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 15

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r(-1)^r x^{12-3r}$，令 $12-3r=0$，解得 $r=4$，故常数项为 $C_6^4=15$.

14. $x+y+1=0$（其他形式的答案只要正确也可）

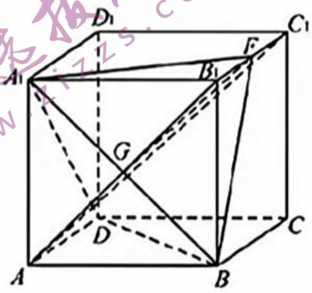
由题意得，$f'(x)=\frac{1}{x}+2f'(1)$，所以 $f'(1)=1+2f'(1)$，解得 $f'(1)=-1$，故 $f(x)=\ln x-2x$，则

$f(1)=-2$，所以曲线在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y+2=-(x-1)$，即 $x+y+1=0$.

15. 8

由题意得，直线 l 过 C 的焦点 F 且倾斜角 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，故 $|MF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}=\dfrac{4}{1-\cos\dfrac{\pi}{3}}=8$.

16. $\sqrt{5}$



由题意得，$\pi\times\left(\sqrt{3}AB\right)^2=12\pi$，故 $AB=2$．因为 $AE\perp B_1D_1$，所以 $AE\perp BD$，又 $AE\perp A_1D$，$BD\cap A_1D=D$，所以 $AE\perp$ 平面 A_1BD，则直线 AE 即为直线 AC_1．取线段 B_1C_1 的中点 F，连接 A_1F,BF，连接 AB_1 交 A_1B 于 G，连接 FG，易证 $FG//AC_1$，故 $AC_1//$ 平面 A_1FB，故平面 α 即为平面 A_1FB，则 $CF=\sqrt{5}$.

四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. （本小题满分 10 分）

（1）$\because 2\sin^2B+2\sin^2C+2\sin B\sin C+\cos\left[2(B+C)\right]=1$，

$\therefore \sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C=\dfrac{1-\cos\left[2(B+C)\right]}{2}=\sin^2(B+C)=\sin^2A$，…………………2 分

由正弦定理可得：$b^2+c^2+bc=a^2$，即 $b^2+c^2-a^2=-bc$，…………………3 分

由余弦定理可得：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，…………………4 分

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$. …………………5 分

（2）$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，$AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}c\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}b\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{3}$，…………………7 分

$\because b=2,c=4,\therefore AD=\dfrac{4}{3}$. …………………8 分

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$AD=\dfrac{4}{3}$，$\angle DAE=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore AE=AD\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}$. …………………10 分

18. （本小题满分 12 分）

（1）记事件 A_1 表示芯片来自甲机器生产，事件 A_2 表示芯片来自乙机器生产，事件 B 表示取到的是合格品.

$P\left(\overline{B}\right)=P\left(A_1\overline{B}\cup A_2\overline{B}\right)=P(A_1)P\left(\overline{B}|A_1\right)+P(A_2)P\left(\overline{B}|A_2\right)$

$=0.6\times(1-0.94)+0.4\times(1-0.95)=0.056$. …………………4 分

（2）由题意得，$X\sim B\left(3,\dfrac{2}{5}\right)$，…………………5 分

故 $P(X=0)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$，$P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{54}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{36}{125}$，$P(X=3)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$. …………………9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

……………………10分

故 $E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ……………………12分

19. （本小题满分12分）

（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 $\begin{cases}a_3=14\\a_9=2a_4+6\end{cases}$，得 $\begin{cases}a_1+2d=14\\a_1+8d=2(a_1+3d)+6\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=4\\d=5\end{cases}$ $\therefore a_n=5n-1$. ……………………3分

由题意得，$2-\frac{S_n}{b_n}=\left(2-\frac{b_1}{b_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即 $S_n=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]b_n$，

$\therefore S_{n+1}=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]b_{n+1}$. ……………………4分

两式作差得：$S_{n+1}-S_n=b_{n+1}=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]b_{n+1}-\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]b_n$，

化简得：$\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right](b_{n+1}-2b_n)=0$，$\therefore b_{n+1}=2b_n$， ……………………5分

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=1$ 为首项、2为公比的等比数列，$\therefore b_n=2^{n-1}$ ……………………6分

（2）由（1）得，$c_n=(5n-1)\cdot 2^{n-1}$.

$\because T_n=4\times2^0+9\times2+14\times2^2+\cdots+(5n-6)\times2^{n-2}+(5n-1)\times2^{n-1}$，

$2T_n=4\times2^1+9\times2^2+14\times2^3+\cdots+(5n-6)\times2^{n-1}+(5n-1)\times2^n$，……………………8分

$\therefore -T_n=-(5n-1)\times2^n+5\times(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})-1$，……………………9分

$\therefore T_n=(5n-1)\cdot2^n+1-5(2^n-1)=(5n-6)\cdot2^n+6$，……………………10分

$\therefore T_n-\left[(4n-6)\cdot2^n+14\right]=n\cdot2^n-8$，……………………11分

$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$T_n<(4n-6)\cdot2^n+14$；当 $n=2$ 时，$T_n=(4n-6)\cdot2^n+14$；当 $n>2,n\in\mathbf{N}^*$ 时，

$T_n>(4n-6)\cdot2^n+14$. ……………………12分

20. （本小题满分12分）

（1）如图，过点 F 作 $FO\perp DC$ 于点 O，连接 OA.

因为二面角 $E-CD-A$ 为直二面角，所以平面 $CDEF\perp$ 平面 $ABCD$，

又平面 $CDEF\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$FO\subset$ 平面 CDE，所以 $FO\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $OA\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $FO\perp OA$ ……………………2分

因为四边形 $CDEF$ 为等腰梯形，$AB=CD=2EF=4$，

所以 $OD=3$，所以 $AO=5$. ……………………4分

又 $AF=3\sqrt{3}$，所以 $FO=\sqrt{2}$，即点 F 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\sqrt{2}$. ……………………5分

（2）以 O 为坐标原点，分别以 OD,OF 所在直线分别为 x,z 轴，过点 O 作平面 $CDEF$ 的垂线为 y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

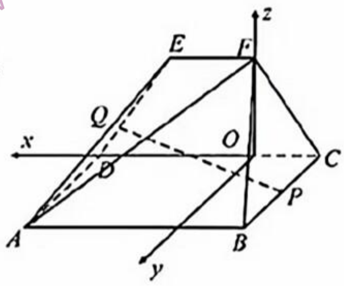
则 $A(3,4,0),D(3,0,0),E(2,0,\sqrt{2}),F(0,0,\sqrt{2}),P(-1,2,0)$， ……………………6 分

由 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AE}=(-\lambda,-4\lambda,\sqrt{2}\lambda)$，得 $Q(3-\lambda,4-4\lambda,\sqrt{2}\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{PQ}=(4-\lambda,2-4\lambda,\sqrt{2}\lambda)$， ……………………7 分

设平面 ADE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{DA}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{DE}=(-1,0,\sqrt{2})$，$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，

得 $\begin{cases}4y=0\\ -x+\sqrt{2}z=0\end{cases}$，令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,1)$． ……………………9 分



又易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$． ……………………10 分

设直线 PQ 与平面 ADE 所成角为 θ，与平面 $ABCD$ 所成角为 α，

则 $\sin\theta=\sin\alpha$，$\therefore \left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PQ}|}\right|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{PQ}|}\right|$， ……………………11 分

整理得 $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=|\sqrt{2}\lambda|$，由 $\lambda>0$，得 $\lambda=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$． ……………………12 分

21. （本小题满分 12 分）

（1）由题意得，$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7}\\ a^2=b^2+c^2\\ a+c=3\end{cases}$， ……………………2 分

解得 $a^2=4,b^2=3$，故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……………………4 分

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，直线 l：$y=kx+2$，

联立 $\begin{cases}y=kx+2\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}$，整理得：$(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$，

由 $\Delta>0$ 得 $k^2>\dfrac{1}{4}$，且 $x_1+x_2=-\dfrac{16k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{3+4k^2}$， ……………………6 分

$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\dfrac{4\sqrt{(1+k^2)(12k^2-3)}}{3+4k^2}$ ……………………8 分

$\because$ 点 O 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$ ……………………9 分

$\therefore S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\dfrac{4\sqrt{12k^2-3}}{3+4k^2}$． ……………………10 分

令 $t=\sqrt{12k^2-3}>0$，故 $4k^2=\dfrac{t^2}{3}+1$，故 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{12t}{t^2+12}=\dfrac{12}{t+\dfrac{12}{t}}\leqslant\sqrt{3}$，

当且仅当 $t=\dfrac{12}{t}$，即 $t=2\sqrt{3}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 时等号成立，

故 $\triangle AOB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$． ……………………12 分

22. （本小题满分 12 分）

（1）令 $f(x)=0$，显然 $m\neq 0$，$\therefore \frac{1}{m}=\frac{\sin x}{e^x}$. ……………………1 分

令 $p(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，$x\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $p'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}=\frac{\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$，……………………2 分

故当 $x\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$p'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$p'(x)<0$，

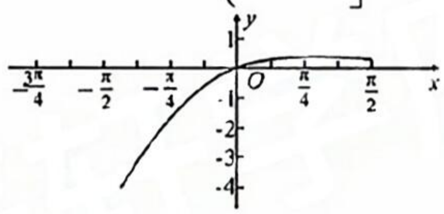
故函数 $p(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，……………………3 分

作出 $p(x)$ 的大致图象如图所示，因为 $p(0)=0$，$p\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$，$p\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，

所以要使函数的图象 $p(x)=\frac{\sin x}{e^x}$ 与直线 $y=\frac{1}{m}$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上恰有 2 个不同的交点，

则 $\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\leqslant\frac{1}{m}<\frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，……………………5 分

解得 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}<m\leqslant e^{\frac{\pi}{2}}$，即实数 m 的取值范围为 $\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},e^{\frac{\pi}{2}}\right]$. ……………………6 分



（2）要证：$g(x_0)+n\ln 2\geqslant n\ln(-n)$，即证：$g(x_0)\geqslant n\ln\left(-\frac{n}{2}\right)$.

因为 $g(x)=f(x)+nx+\sqrt{2}m=e^x-m\sin x+nx+\sqrt{2}m$，

所以 $g'(x)=e^x-m\cos x+n$，则 $g'(x_0)=e^{x_0}-m\cos x_0+n=0$，……………………7 分

故 $g(x_0)=g(x_0)+g'(x_0)=2e^{x_0}-m(\sin x_0+\cos x_0)+nx_0+n+\sqrt{2}m$

$=2e^{x_0}-\sqrt{2}m\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)+nx_0+n+\sqrt{2}m$

$=2e^{x_0}+\sqrt{2}m\left[1-\sin\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)\right]+nx_0+n\geqslant 2e^{x_0}+nx_0+n$. ……………………9 分

令 $h(x)=2e^x+nx+n$，则 $h'(x)=2e^x+n$，……………………10 分

故当 $x\in\left(-\infty,\ln\left(-\frac{n}{2}\right)\right)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in\left(\ln\left(-\frac{n}{2}\right),+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，

故函数 $h(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\frac{n}{2}\right)\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\left(-\frac{n}{2}\right),+\infty\right)$ 上单调递增，

则 $h(x)\geqslant h\left(\ln\left(-\frac{n}{2}\right)\right)=n\ln\left(-\frac{n}{2}\right)$，即 $g(x_0)+n\ln 2\geqslant n\ln(-n)$. ……………………12 分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.