2023 届高三考试
数学试题参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

若 $B=\{$偶数$\}$,则 $A\cap B\neq\{2,7\}$;若 $B=\{2,8,9\}$,则 $A\cap B\neq\{2,7\}$;若 $B=\{$质数$\}$,则 $A\cap B=\{2,7\}$;若 $B=\{2,7,8,9\}$,则 $A\cap B\neq\{2,7\}$.

2. B 【解析】本题考查复数的运算与复数的模,考查数学运算的核心素养.

由 $z-\mathrm{i}\overline{z}=1-\mathrm{i}-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$,得 $|z-\mathrm{i}\overline{z}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

3. D 【解析】本题考查统计,考查应用意识.

由图可知,猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油这 6 种食品中,粮食价格同比涨幅最小,所以 A 错误. $34.4\%<5\times8.5\%$,所以 B 错误. 去年 11 月鲜菜价格要比今年 11 月高,所以 C 错误. 因为 $\frac{1}{7}\times(-21.2\%+7.6\%+3\%+8.5\%+9.6\%+10.4\%+34.4\%)>\frac{1}{7}\times(-22\%+7\%+3\%+8\%+9\%+10\%+34\%)=\frac{1}{7}\times49\%=7\%$,所以 D 正确.

4. A 【解析】本题考查抛物线的标准方程与性质,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

依题意可设 C 的标准方程为 $y^2=-2px(p>0)$,因为 C 的焦点到准线的距离为 3,所以 $p=3$,所以 C 的标准方程为 $y^2=-6x$.

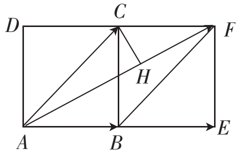
5. B 【解析】本题考查简单几何体的体积与三视图,考查空间想象能力与运算求解能力.

由三视图可知,该几何体由一个棱长为 2 的正方体和底面半径为 $\sqrt{2}$,高为 2 的圆柱拼接而成,故该几何体的体积为 $2^3+\pi\times(\sqrt{2})^2\times2=8+4\pi$.

6. C 【解析】本题考查等差数列的实际应用,考查应用意识与数学建模的核心素养.

设小方第 n 天存钱 a_n 元,则数列 $\{a_n\}$ 从第 4 项起成等差数列,且该等差数列的首项为 1,公差为 1,所以小方存钱 203 天的储蓄总额为 $1+1+1+200\times1+\frac{200\times199}{2}\times1=203+19900=20103$ 元.

7. A 【解析】本题考查向量的新概念与向量的加法,考查直观想象的核心素养.



过 C 作 $CH\perp AF$ 于 H. 设 $AB=2$,则 $AC=2\sqrt{2}$,$CH=\frac{2}{\sqrt{5}}$,所以 $AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\frac{6}{\sqrt{5}}$,则 $\frac{AH}{AF}=\frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$,所以 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AF}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}$. 连接 BF,根据向量加法的平行四边形法则,得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}$,所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AE}$.

8. A 【解析】本题考查程序框图与线性规划,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

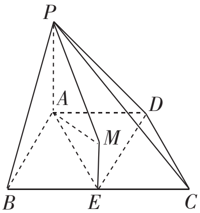
作出不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y\leqslant 0,\\ y\leqslant 1\end{cases}$表示的可行域(图略),由图可知,当直线 $z=3x+y$ 过点(1,1)时,z 取得最大值 4,当直线 $z=3x+y$ 过点(−1,1)时,z 取得最小值−2.

因为 4<5,且 $x,y\in\mathbf{R}$,所以输出的 S 的最小值为−2,最大值为 5.

9. C **【解析】本题考查函数的实际应用,考查应用意识与数学运算的核心素养.**

$f(x)=\log_a[k(x+1)^2]=\log_a k+2\log_a(x+1)$,由 $f(2)=2,f(8)=3$,得 $\log_a k+2\log_a(2+1)=2,\log_a k+2\log_a(8+1)=3$,两式相减得 $\log_a 9=1$,则 $a=9$,所以 $\log_a k+2=3,k=9$. 该住房装修完成后要达到安全入住的标准,则 $0.48-0.1f(x)\leqslant 0.08$,则 $f(x)\geqslant 4$,即 $1+2\log_9(x+1)\geqslant 4$,解得 $x\geqslant 26$,故至少需要通风 26 周.

10. D **【解析】本题考查四棱锥的外接球,考查空间想象能力与运算求解能力.**



如图,取 BC 的中点 E,过 E 作 $ME\parallel AP$,使得 $2ME=AP$,连接 AE,DE,AM,PM. 在等腰梯形 $ABCD$ 中,由 $BE=AB,\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$,可得$\triangle ABE$ 为正三角形. 因为底面 $ABCD$ 是等腰梯形,所以$\triangle CDE$ 为正三角形,所以 $BE=AE=DE=EC=m$. 由 $AP\perp$平面 $ABCD$,得 $ME\perp$平面 $ABCD$. 又 $2ME=AP$,所以 M 到 A,B,C,D,P 的距离相等,则 M 为球 O 的球心. 在 Rt$\triangle MAE$ 中,$AM=\sqrt{AE^2+ME^2}=\sqrt{m^2+(\dfrac{1}{2}m)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}m$,所以球 O 的表面积为 $4\pi\times(\dfrac{\sqrt{5}}{2}m)^2=5\pi m^2=125\pi$,解得 $m=5$.

11. A **【解析】本题考查导数的应用与导数的几何意义,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.**

由 $f'(x)=x^2+x+c=0$,得 $x_1+x_2=-1,x_1x_2=c,\Delta=1-4c>0$,可得 $c<\dfrac{1}{4}$. 因为 $f(x_1)=x_2,f(x_2)=x_1$,所以两式作差得$\dfrac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)+\dfrac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)+c(x_2-x_1)=x_1-x_2$,则$\dfrac{1}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+\dfrac{1}{2}(x_2+x_1)+c=-1$,所以$\dfrac{1}{3}[(x_1+x_2)^2-x_1x_2]+\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)+c=\dfrac{1}{3}(1-c)-\dfrac{1}{2}+c=-1$,解得 $c=-\dfrac{5}{4}$.

12. D **【解析】本题考查双曲线的离心率,考查直观想象的核心素养与分类讨论的数学思想.**

当 $a=b$ 时,直线 AF 与另一条渐近线平行,所以 $a\neq b$.

当 $a>b$ 时,如图 1,过 F 作另一条渐近线的垂线,垂足为 P,则 $|AF|=|PF|$,由 $|FB|=4|AF|$,得 $\sin\angle PBF=\dfrac{|PF|}{|BF|}=\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{1}{4}$,则 $\cos\angle AOP=\dfrac{1}{4}$,所以 $2\cos^2\angle AOF-1=\dfrac{1}{4}$,则 $\cos\angle AOF=\sqrt{\dfrac{5}{8}}$,$\sin\angle AOF=\sqrt{\dfrac{3}{8}}$,所以 $\tan\angle AOF=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$,则 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$,$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+(\dfrac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\dfrac{3}{5}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

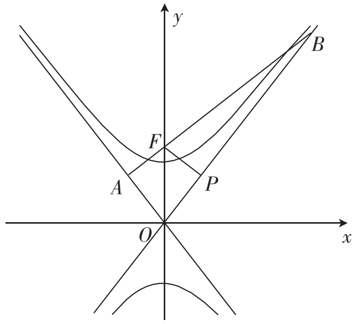


图 1

当 $a<b$ 时，如图 2，过 F 作另一条渐近线的垂线，垂足为 Q，则 $|AF|=|QF|$，由 $|FB|=4|AF|$，得 $\sin\angle QBF=\frac{|QF|}{|BF|}=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOB=\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOQ=-\frac{1}{4}$，所以 $2\cos^2\angle AOF-1=-\frac{1}{4}$，则 $\cos\angle AOF=\sqrt{\frac{3}{8}}$，$\sin\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{8}}$，所以 $\tan\angle AOF=\sqrt{\frac{5}{3}}$，则 $\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{5}{3}}$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{1+\frac{5}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

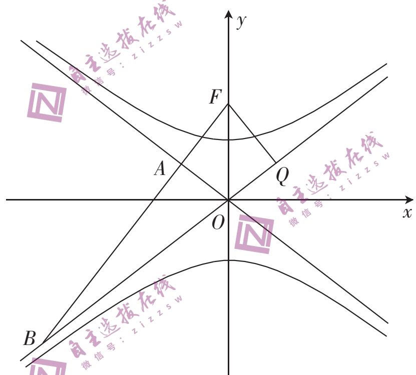


图 2

综上，C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 或 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

13. $x=\frac{3\pi}{2}$（答案不唯一，只要对称轴方程满足 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 即可） **【解析】本题考查三角函数图象的对称性，考查数学运算的核心素养.**

令 $\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

14. $2\sin 3$；$0.1^{-0.2}$ **【解析】本题考查三角函数值与指数大小的比较，考查逻辑推理的核心素养.**

因为 $1<4^{0.2}<10^{0.2}$，$0.1^{-0.2}=10^{0.2}>10^{0.15}>1$，$2\sin 3\approx 2\sin 171.9^\circ<2\sin 150^\circ=1$，所以最小的是 $2\sin 3$，最大的是 $0.1^{-0.2}$.

15. 2940 **【解析】本题考查排列组合的实际应用，考查逻辑推理的核心素养.**

人数分配有 2,2,4 和 3,3,2 两种情形,所以共有$\left(\frac{C_8^4C_4^2C_2^2}{A_2^2}+\frac{C_8^3C_5^3C_2^2}{A_2^2}\right)A_3^3=490\times6=2940$ 种安排方案.

16. $\frac{6}{5}+\frac{3}{10}(-4)^{n-1}$ **【解析】本题考查数列的综合,考查数学抽象、逻辑推理、数学运算的核心素养.**

因为 $b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$,$a_n=\frac{2b_n+b_{n+1}}{3}$,所以 $3a_n-2b_n=2b_n+b_{n+1}-a_n-a_{n+1}$,

整理得 $a_{n+1}-b_{n+1}=-4(a_n-b_n)$.

因为 $b_1=\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{3}{2}$,所以 $a_1-b_1=-\frac{1}{2}$,

所以$\{a_n-b_n\}$是首项为$-\frac{1}{2}$,公比为-4 的等比数列,所以 $a_n-b_n=-\frac{(-4)^{n-1}}{2}$.

因为 $3a_n+2b_n=2b_n+b_{n+1}+a_n+a_{n+1}$,所以 $2a_n=a_{n+1}+b_{n+1}$,则 $2b_n-(-4)^{n-1}=2b_{n+1}-\frac{(-4)^n}{2}$,所以 $b_{n+1}-b_n=-\frac{3}{2}(-4)^{n-1}$,

所以 $b_n=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}[1-4+4^2-\cdots+(-4)^{n-2}]=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1-(-4)^{n-1}}{1-(-4)}=\frac{6}{5}+\frac{3}{10}(-4)^{n-1}$.

17. 解:(1)因为 $2\sin A+\tan A=0$,

所以 $2\sin A+\frac{\sin A}{\cos A}=0$. ·· 1 分

在$\triangle ABC$ 中,$\sin A>0$,所以 $2+\frac{1}{\cos A}=0$,则 $\cos A=-\frac{1}{2}$. ·························· 3 分

因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ·· 4 分

(2)由 $b\sin A=4\sin B$ 及正弦定理,得 $ab=4b$, ································ 5 分

所以 $a=4$. ·· 6 分

由余弦定理得,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\geqslant2bc+bc$, ····························· 7 分

所以 $bc\leqslant\frac{16}{3}$, ·· 8 分

当且仅当 $b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时,等号成立. ·· 9 分

因为 $\lg b+\lg c\geqslant1-2\cos(B+C)$,所以 $\lg(bc)\geqslant1+2\cos A=0$,则 $bc\geqslant1$, ············· 10 分

所以 $1\leqslant bc\leqslant\frac{16}{3}$,因为$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}bc\sin A$,所以$\triangle ABC$ 面积的取值范围是$[\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{4\sqrt{3}}{3}]$. ·· 12 分

18. 解:(1)$\bar{x}=\frac{3+6+8+10+14+17+22+32}{8}=14$, ································ 1 分

$\bar{y}=\frac{43+52+60+71+74+81+89+98}{8}=71$, ····································· 2 分

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-8\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{9138-8\times14\times71}{634}=\dfrac{1186}{634}\approx1.871$，…………………………… 4 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\approx71-1.871\times14\approx44.81$，…………………………… 5 分

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.87x+44.81$. …………………………… 6 分

(2)当 $X=2000$ 时，$\hat{y}=1.87\times20+44.81=82.21$，…………………………… 7 分

则 $Y=82$；…………………………… 8 分

当 $X=3000$ 时，$\hat{y}=1.87\times25+44.81=91.56$，…………………………… 9 分

则 $Y=92$. …………………………… 10 分

故 Y 的数学期望 $E(Y)=82\times0.6+92\times0.4=86$. …………………………… 12 分

【注】第(1)问中要求 $\hat{a}$ 精确到 0.01 的估计值，不能将 $\hat{b}$ 精确到 0.01 的估计值 1.87 代入 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$ 求得，如果这样写“$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-8\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{9138-8\times14\times71}{634}=\dfrac{1186}{634}\approx1.87$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=71-\dfrac{1186}{634}\times14\approx44.81$”，不扣分.

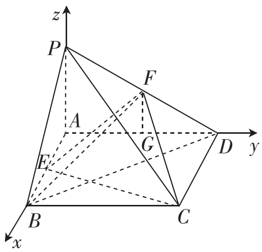
19. (1)证明：∵四边形 $ABCD$ 为矩形，∴$AD\perp AB$. …………………………… 1 分

∵$AD\perp BP$，$AB\cap BP=B$，∴$AD\perp$平面 PAB，∴$AD\perp AP$. …………………………… 2 分

∵$AP\perp BD$，$BD\cap AD=D$，∴$AP\perp$平面 $ABCD$，…………………………… 3 分

∴$AP\perp CE$，∴异面直线 CE 与 AP 所成角为定值，且该定值为 90°. …………………………… 4 分

(2)解：如图，在 AD 上取点 G，使得 $FG/\!/AP$.



由 $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{DF}{DP}$，设 $AE=xAB$，$DF=xPD$，其中 $0<x<1$.

由 $AB=AP=1$，$BC=2$，$AP\perp$平面 $ABCD$，可得 $PD=\sqrt{AP^2+AD^2}$ $=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AE=x$，$DF=\sqrt{5}x$，$BE=1-x$. ………………… 5 分

∵$FG/\!/AP$，$AP\perp$平面 $ABCD$，∴$FG\perp$平面 $ABCD$.

在△APD 中，有 $\dfrac{GF}{AP}=\dfrac{DF}{PD}$，可得 $\dfrac{GF}{1}=\dfrac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5}}$，可得 $GF=x$. ……… 6 分

△BCE 的面积为 $\dfrac{1}{2}BE\cdot BC=\dfrac{1}{2}(1-x)\times2=1-x$.

$V_{C-BEF}=V_{F-BCE}=V(x)=\dfrac{1}{3}(1-x)x=\dfrac{1}{3}[-(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}]$，

可得当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，三棱锥 $F-BCE$ 体积的最大值为 $V(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{12}$. …………………………… 7 分

当三棱锥 $F-BCE$ 的体积取得最大值时，此时 E 为 AB 的中点，F 为 DP 的中点.

以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，$C(1,2,0)$，$P(0,0,1)$，$E(\dfrac{1}{2},0,0)$，$F(0,$

$1,\frac{1}{2})$. ………………………………………………………………………… 8 分

$\overrightarrow{CP}=(-1,-2,1),\overrightarrow{EC}=(\frac{1}{2},2,0),\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$.

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,即 $\begin{cases}\frac{1}{2}x+2y=0,\\-\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$ ………………………………… 9 分

令 $x=4$,得 $\boldsymbol{n}=(4,-1,6)$. ………………………………………………… 10 分

因为 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CP}\rangle|=\frac{4}{\sqrt{6}\times\sqrt{53}}=\frac{2\sqrt{318}}{159}$, ………………………………………… 11 分

所以当三棱锥 $C-BEF$ 的体积取得最大值时,PC 与平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{318}}{159}$.

………………………………………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)依题意可得 $a=2$. ………………………………………………………… 1 分

当直线 l 经过点 $D(-2,\sqrt{2})$ 时,l 的方程为 $x=-4\sqrt{2}y+6$, ………………………… 2 分

代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$,整理得 $(8b^2+1)y^2-12\sqrt{2}b^2y+8b^2=0$, ……………………… 3 分

$\Delta=(-12\sqrt{2}b^2)^2-4(8b^2+1)\times 8b^2=32b^2(b^2-1)=0$, ……………………………… 4 分

解得 $b^2=1$,所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 5 分

(2)依题意可得直线 l 的斜率不为 0,可设 $l:x=my+6,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=my+6,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+12my+32=0$,

则 $\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{12m}{m^2+4},\\y_1y_2=\frac{32}{m^2+4},\end{cases}$ ………………………………………………………… 6 分

则 $k_{BP}k_{BQ}=\frac{y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{y_1y_2}{(my_1+4)(my_2+4)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16}$

$=\frac{\frac{32}{m^2+4}}{\frac{32m^2}{m^2+4}-\frac{48m^2}{m^2+4}+16}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$. ……………………………………… 8 分

因为 $k_{AP}k_{BP}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{1-\frac{x_1^2}{4}}{x_1^2-4}=-\frac{1}{4}$, ………………………………………… 9 分

所以 $k_{AP}=-\frac{1}{2}k_{BQ}$. 又因为 $k_{AP}+k_{BQ}=-\frac{1}{2}$,所以 $k_{BQ}=-1$, ………………………… 10 分

则直线 BQ 的方程为 $y=-x+2$，与 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立得 $Q(\frac{6}{5},\frac{4}{5})$，………………………… 11 分

所以 l 的方程为 $y=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}-6}(x-6)$，即 $y=-\frac{1}{6}x+1$. ………………………………………… 12 分

21.(1)解：假设存在，并设切点为 (m,km).

因为 $f(x)=\frac{e^x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$， ………………………………………… 1 分

则 $\begin{cases} f(m)=\frac{e^m}{m^2}=km, \\ f'(m)=\frac{e^m(m-1)}{m^2}=k, \end{cases}$ ………………………………………… 2 分

整理得 $e^m(m-1)=e^m$，解得 $m=2$， ………………………………………… 3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 存在过原点的切线，且切点坐标为 $(2,\frac{e^2}{2})$. ………………………… 4 分

(2)证明：要证 $f(x)>\frac{1}{2}x^2\ln x$，即证 $\frac{e^x}{x}>\frac{1}{2}x^2\ln x$，即证 $\frac{2e^x}{x^4}>\frac{\ln x}{x}$. ………………… 6 分

设函数 $g(x)=\frac{2e^x}{x^4}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{2e^x(x-4)}{x^5}$.

在区间 $(0,4)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，在区间 $(4,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(4)=\frac{2e^4}{4^4}$. ………………………………………… 8 分

设函数 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

在区间 $(0,e)$ 上，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，在区间 $(e,+\infty)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$. ………………………………………… 10 分

因为 $e^5>128$，所以 $\frac{2e^4}{4^4}>\frac{1}{e}$， ………………………………………… 11 分

即 $g(x)_{\min}>h(x)_{\max}$，故 $f(x)>\frac{1}{2}x^2\ln x$. ………………………………………… 12 分

22.解：(1)对于曲线 M 的参数方程，令 $t-2=0$，得 $t=2$，

则 $t^3+t=10$，则 $A(10,0)$. ………………………………………… 1 分

对于曲线 N 的参数方程，令 $t-\sqrt{t}=0$，得 $t=0$ 或 1，……………………………… 2 分

则 $t+\sqrt{t}=0$ 或 2，所以 $B(0,0)$，$C(0,2)$. ………………………………………… 3 分

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(2-0)\times10=10$. ………………………………………… 4 分

(2)对于曲线 M 的参数方程，由 $y=t-2$，得 $t=y+2$，……………………………… 5 分

代入 $x=t^3+t$，得 $x=(y+2)^3+y+2$，则曲线 M 的普通方程为 $x=(y+2)^3+y+2$. ……… ………………………………………… 6 分

设线段 PC 的中点为 $Q(x,y)$，$P(x',y')$，则$\begin{cases}x=\dfrac{x'}{2},\\ y=\dfrac{y'+2}{2},\end{cases}$ ………………………………… 7 分

解得$\begin{cases}x'=2x,\\ y'=2y-2.\end{cases}$ ………………………………………………………………………… 8 分

因为 $P(x',y')$ 在曲线 M 上，所以 $x'=(y'+2)^3+y'+2$，

所以 $2x=(2y-2+2)^3+2y-2+2$，……………………………………………………… 9 分

整理得 $x=4y^3+y$，所以线段 PC 中点的轨迹方程为 $x=4y^3+y$. ……………………… 10 分

23. 解：(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)\leqslant 2|x-4|$ 可化为 $2|x|\leqslant|x-4|$，………………………… 1 分

不等式两边平方，得 $4x^2\leqslant(x-4)^2$，整理得 $3x^2+8x-16\leqslant 0$，……………………… 3 分

解得 $-4\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$. 故当 $a=0$ 时，不等式 $f(x)\leqslant 2|x-4|$ 的解集为 $[-4,\frac{4}{3}]$. ………… 5 分

(2)(解法一) 当 $a=1$ 时，由绝对值不等式得 $f(x)=|x|+|x-1|+|x-4|\geqslant|x|+|x-4|$ $\geqslant|x-(x-4)|=4$. ………………………………………………………………………… 7 分

由 $f(1)=4$，得 $f(x)$ 的最小值为 4. ……………………………………………………… 8 分

因为 $f(x)>m^2$，所以 $m^2<4$，解得 $-2<m<2$.

故 m 的取值范围为 $(-2,2)$. ……………………………………………………………… 10 分

(解法二) 当 $a=1$ 时，$f(x)=|x|+|x-1|+|x-4|=\begin{cases}5-3x, x<0,\\ 5-x, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+3, 1<x\leqslant 4,\\ 3x-5, x>4.\end{cases}$ ……………… 7 分

当 $x<0$ 时，$f(x)>5$；当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$4\leqslant f(x)\leqslant 5$；

当 $1<x\leqslant 4$ 时，$4<f(x)\leqslant 7$；当 $x>4$ 时，$f(x)>7$.

故 $f(x)$ 的最小值为 4. ………………………………………………………………………… 9 分

因为 $f(x)>m^2$，所以 $m^2<4$，解得 $-2<m<2$.

故 m 的取值范围为 $(-2,2)$. ……………………………………………………………… 10 分