树德中学高2021级高三上学期10月阶段性测试数学(理科)试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	D	C	D	B	B	C	C	D	B	B

13. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$　　14.9　　15.1　　16. $\left[-\frac{2}{\mathrm{e}},0\right)$.

17. (1) 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，

则 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=25$，所以 $a_3=5$，又 $a_2=3$，所以 $\begin{cases}a_1+2d=5\\a_1+d=3\end{cases}$，解得 $a_1=1$，$d=2$.

则 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$.……………………………………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知，$b_n=\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$.

所以 $b_n=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$

$T_n=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$ ……………… 12 分

18. (1) 证明：设 AC 交 BD 于点 O，连接 FO，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore AC\perp BD$，O 为 AC 中点，

又 $\because FA=FC$，$\therefore AC\perp FO$，又 $FO\cap BD=O$，

$FO\subset$ 平面 $BDEF$，$BD\subset$ 平面 $BDEF$，$\therefore AC\perp$ 平面 $BDEF$；……………………………… 4 分

(2) 解：如图，连接 DF，$\because$ 四边形 $BDEF$ 为菱形，$\angle DBF=60^\circ$，

$\therefore \triangle DBF$ 为等边三角形，又 $\because O$ 为 BD 中点，$\therefore FO\perp BD$，

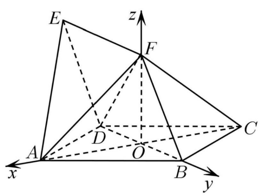
又 $AC\perp FO$，$AC\cap BD=O$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore FO\perp$ 平面 $ABCD$，分别以 OA，OB，OF 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系如图所示，

设 $AB=2$，则 $BD=2$，$AC=2\sqrt{3}$，又 $\therefore \triangle DBF$ 为等边三角形，

$\therefore OF=\sqrt{3}$，$\therefore$ 点 $O(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$F(0,0,\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{CF}=(\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},1,0)$，



设平面 BCF 的一个法量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CF}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\\\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$，

令 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},-1)$，

$\because FO\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $FO\perp BD$，

又因为 $AC\perp BD$，$AC\cap FO=O$，

所以 $BD\perp$ 平面 AFC，

则 $\overrightarrow{OB}=(0,1,0)$ 即为平面 AFC 的一个法向量，

$\therefore \cos\langle\vec{n},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{OB}|}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$，

又二面角 $A-FC-B$ 的平面角是锐角，

$\therefore$ 二面角 $A-FC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.………………………………………………………… 12 分

19. (1) 由题知，X 的取值可能为 1，2，3 所以 $P(X=1)=\left(\frac{1}{C_2^1}\right)^2=\frac{1}{4}$；

$P(X=2)=\left[1-\left(\frac{1}{C_2^1}\right)^2\right]\left(\frac{1}{C_3^1}\right)^2=\frac{1}{12}$；$P(X=3)=\left[1-\left(\frac{1}{C_2^1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{1}{C_3^1}\right)^2\right]=\frac{2}{3}$；

所以 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$

所以数学期望为 $E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{12}+3\times\frac{2}{3}=\frac{3+2+24}{12}=\frac{29}{12}$.…………… 6 分

(2) 令 $x_i=\frac{1}{t_i}$，则 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，由题知：$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=315$，$\bar{y}=90$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{315-5\times0.46\times90}{1.46-5\times0.212}=\frac{108}{0.4}=270$，

所以 $\hat{a}=90-270\times0.46=-34.2$，$\hat{y}=270x-34.2$，故所求的回归方程为：$\hat{y}=\frac{270}{t}-34.2$，

所以，估计 $t=6$ 时，$y\approx11$；估计 $t=7$ 时，$y\approx4$；估计 $t\geqslant8$ 时，$y<0$；

预测成功的总人数为 $450+11+4=465$.……………………………………………………… 12 分

20. (1) 由已知：$C_2(4,0)$；C_1 的准线为 $x=-\frac{1}{4}$.

圆心 C_2 到 C_1 准线距离为 $4-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{17}{4}$；……………………………………………… 4 分

(2) 设 $P(y_0^2,y_0)$，$A(y_1^2,y_1)$，$B(y_2^2,y_2)$，切线 PA:$x-y_0^2=m_1(y-y_0)$

由 $\begin{cases}x=m_1y+y_0^2-m_1y_0\\y^2=x\end{cases}$ 得：$y^2-m_1y-y_0^2+m_1y_0=0$

由 $y_0+y_1=m_1$ 得：$y_1=m_1-y_0$，

切线 PB:$x-y_0^2=m_2(y-y_0)$，同理可得：$y_2=m_2-y_0$

依题意：$C_2(4,0)$ 到 PA:$x-m_1y-y_0^2+m_1y_0=0$ 距离 $\frac{|4-y_0^2+m_1y_0|}{\sqrt{m_1^2+1}}=1$

整理得：$(y_0^2-1)m_1^2+(8y_0-2y_0^3)m_1+y_0^4-8y_0^2+15=0$

同理：$(y_0^2-1)m_2^2+(8y_0-2y_0^3)m_2+y_0^4-8y_0^2+15=0$

$\therefore m_1+m_2=\frac{2y_0^3-8y_0}{y_0^2-1}(y_0^2\neq1)$

$\because k_1=\frac{y_0}{y_0^2-4}$，$k_2=\frac{y_1-y_2}{y_1^2-y_2^2}=\frac{1}{y_1+y_2}=\frac{1}{m_1+m_2-2y_0}=\frac{y_0^2-1}{-6y_0}$

$\therefore k_1k_2=\frac{y_0}{y_0^2-4}\cdot\frac{y_0^2-1}{-6y_0}=-\frac{5}{24}$，解得：$y_0=\pm4$

故所求 P 点坐标为 $(16,4)$ 或 $(16,-4)$. ……………………………………………………… 12 分

21. (1) 当 $k=2$ 时，$f(x)=(\mathrm{e}^x-2)x^2$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x\cdot x^2+(\mathrm{e}^x-2)\cdot 2x=x(x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x-4)=x[(x+2)\mathrm{e}^x-4]$，

令 $g(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-4$，则 $g'(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，

所以 $g(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-4$ 在 $(-\infty,-3)$ 单调递减，在 $(-3,+\infty)$ 单调递增.

又因为 $x<-2$ 时，$g(x)<0$ 恒成立，$g(0)=-2<0$，$g(1)=3\mathrm{e}-4>0$，

所以 $g(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-4$ 在 $(0,1)$ 上有唯一的零点 x_0.

所以当 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,x_0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以函数 $f(x)$ 有两个极值点. ……………………………4 分

(2) $f'(x)=\mathrm{e}^x x^2+(\mathrm{e}^x-k)\cdot 2x=x[(x+2)\mathrm{e}^x-2k]$，

令 $h(x)=(x+2)\mathrm{e}^x-2k(k>0)$，则 $x<-2$ 时，$h(x)<0$.

$h'(x)=(x+3)\mathrm{e}^x$，当 $x>-3$ 时，$h(x)$ 单调递增. $h(0)=2-2k$，

①当 $k=1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，$f(x)$ 无极值，不存在符合题意的 k.

②当 $k>1$ 时，$h(0)<0$，$h(k)=(k+2)\mathrm{e}^k-2k>(k+2)\cdot\mathrm{e}-2k>0$，存在 $x_0\in(0,k)$，使得 $h(x_0)=0$，

当 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(0,x_0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(0)=0<2ek^2$，$f(x)$ 的极小值为 $f(x_0)<f(0)=0<2ek^2$，故不存在符合题意的 k.

③当 $0<k<1$ 时，$h(0)>0$，存在 $x_0\in(-2,0)$，使得 $h(x_0)=0$，

当 $x\in(-\infty,x_0)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_0,0)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0<2\mathrm{e}^2k^2$，$f(x)$ 的极大值为 $f(x_0)$，

如果存在正实数 k 使函数 $f(x)$ 的极值为 $2ek^2$，则 $f(x_0)=(\mathrm{e}^{x_0}-k)x_0^2=2ek^2$，

又因为 $h(x_0)=(x_0+2)\mathrm{e}^{x_0}-2k=0$. 所以 $\left(\dfrac{2k}{x_0+2}-k\right)x_0^2=2ek^2$，所以 $x_0^3+2ek(x_0+2)=0$，

所以 $x_0^3+\mathrm{e}^{x_0+1}(x_0+2)^2=0$，即 $\dfrac{x_0^3}{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^{x_0}(x_0+2)^2=0$，

令 $H(x)=\dfrac{x^3}{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^x(x+2)^2$，则 $H'(x)=\dfrac{3x^2}{\mathrm{e}}+\mathrm{e}^x(x^2+6x+8)$，因为 $x\in(-2,0)$，所以 $H'(x)>0$.

所以 $H(x)$ 在 $(-2,0)$ 单调递增，又因为 $H(-1)=0$，所以 $x_0=-1$，此时 $k=\dfrac{(x_0+2)\mathrm{e}^{x_0}}{2}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$，

综上所述，$k=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，存在极值为 $2ek^2$. ………………………………………………………………12 分

22. (1) 由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，得其普通方程为 $y=x+2$，

$\therefore$ 直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\theta=\rho\cos\theta+2$.

又 $\because$ 圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入并化简得 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$，$\therefore$ 圆 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$.……5 分

(2) 将直线 l：$\rho\sin\theta=\rho\cos\theta+2$，与圆 C：$\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$ 联立，得

$(4\cos\theta+2\sin\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=2$，整理得 $\sin\theta\cos\theta=3\cos^2\theta$，$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{2}$，或 $\tan\theta=3$.

不妨记点 A 对应的极角为 $\dfrac{\pi}{2}$，点 B 对应的极角为 θ，且 $\tan\theta=3$.

于是，$\cos\angle AOB=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.………………………………………………………………10 分

23. (1) $f(x)\leqslant x+1$，即 $|x-1|+|x-3|\leqslant x+1$.

当 $x<1$ 时，不等式可化为 $4-2x\leqslant x+1$，解得：$x\geqslant 1$，又 $\because x<1$，此时无解；

当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，不等式可化为 $2\leqslant x+1$，解得：$x\geqslant 1$，又 $\because 1\leqslant x\leqslant 3$，$\therefore 1\leqslant x\leqslant 3$.

当 $x>3$ 时，不等式可化为 $2x-4\leqslant x+1$，解得：$x\leqslant 5$，又 $\because x>3$，$\therefore 3<x\leqslant 5$.

综上所得，$1\leqslant x\leqslant 3$ 或 $3<x\leqslant 5$，即 $1\leqslant x\leqslant 5$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $[1,5]$. ………………………………………………………………………5 分

(2) 由绝对值不等式性质得，$|x-1|+|x-3|\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2$，

$\therefore c=2$，即 $a+b=2$.

令 $a+1=m$，$b+1=n$，则 $m>1$，$n>1$，$a=m-1$，$b=n-1$，$m+n=4$，

$\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{b^2}{b+1}=\dfrac{(m-1)^2}{m}+\dfrac{(n-1)^2}{n}=m+n+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-4=\dfrac{4}{mn}\geqslant\dfrac{4}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}=1$，

等且仅当 $m=n=2$ 即 $a=b=1$ 时等号成立.

原不等式得证.……………………………………………………………………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。