

湖北省高中名校联盟 2022~2023 学年度下学期高一联合测评

数 学 试 卷

命题学校及命题人:夷陵中学 杜朝阳、杨晓璐

审题单位:圆创教育教研中心 湖北省武昌实验中学

本试题共4页,22题。满分150分。考试用时120分钟。

考试时间:2023年5月29日下午15:00—17:00

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{y | y = \sin x\}$, $B = \{y | y = 2^x, x \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$
C. $[-1, 0)$ D. $(0, 1]$
2. 已知 i 为虚数单位,复数 $z = i(a - 2i)$ 的虚部与实部互为相反数,则实数 $a =$
A. -1 B. -2
C. 1 D. 2
3. 立体几何中的四个基本事实是学习立体几何的基础,下列四个命题中不是立体几何中的基本事实的是
A. 过不在一条直线上的三点,有且仅有一个平面
B. 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内
C. 平行于同一条直线的两条直线平行
D. 垂直于同一条直线的两条直线平行
4. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2, |b| = 3, a \cdot b = 0$, 则 $|a + b| =$
A. $\sqrt{13}$ B. 1
C. 5 D. $\sqrt{11}$
5. 点 P 在以坐标原点为圆心,半径为1的圆 O 上逆时针作匀速圆周运动,起点为圆 O 与 x 轴正半轴的交点,点 Q 为 $y = -\sqrt{3}x (x \leq 0)$ 与圆 O 的交点,记点 P 运动到点 R ,使得 $\sin \angle ROQ = \frac{2}{3}$ (点 R 在第二象限),则点 R 的坐标为
A. $(\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6}, \frac{2+\sqrt{15}}{6})$ B. $(\frac{-\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6}, \frac{-2+\sqrt{15}}{6})$
C. $(\frac{-2-\sqrt{15}}{6}, \frac{-\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6})$ D. $(\frac{2-\sqrt{15}}{6}, \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{6})$

6. 将函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ 向右平移 $\varphi (\varphi > 0)$ 个单位长度后得到一个偶函数, 则实数 φ 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

7. 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = BB_1$, 过点 A 作直线 l 与 A_1C_1 和 B_1C 所成的角均为 α , 则 α 的最小值为

- A. 60° B. 45° C. 30° D. 15°

8. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} \in (\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$, 则 $(c+a-b)(c+b-a)$ 的取值范围为

- A. $(8\sqrt{2}-8, 8)$ B. $(6\sqrt{3}, 12+6\sqrt{3})$
C. $(12-6\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ D. $(12-6\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 i 为虚数单位, 则

- A. 复数 $z = 2 - 3i$ 在复平面内对应的点位于第四象限
B. $|1 - 2i| = 6$
C. $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2023} = -1$
D. $z = 1 - \sqrt{3}i$, 则 $z \cdot \bar{z} = 4$

10. 已知向量 $a = (1, \sqrt{3})$, $b = (\cos \theta, \sin \theta) (\theta \in [0, \pi])$, 则

- A. 若 $a \parallel b$, 则 $\theta = \frac{\pi}{6}$ B. $a \cdot b$ 的最小值为 -1
C. $|a+b| = |a-b|$ 可能成立 D. $|a-b|$ 的最大值为 3

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 P 为线段 BC_1 上的动点, 则

- A. $DP \parallel$ 平面 AB_1D
B. $D_1P + CP$ 的最小值为 $\sqrt{1+\sqrt{2}}$
C. 直线 DP 与平面 $ABCD$ 、平面 DCC_1D_1 、平面 ADD_1A_1 所成的角分别为 α, β, γ , 则 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$
D. 点 C 关于平面 AB_1D_1 的对称点为 M , 则 M 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{4}{3}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 3$, $A = \frac{\pi}{3}$, O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 则

- A. 若 $\triangle ABC$ 有两个解, 则 $3 < c < 2\sqrt{3}$
B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的取值范围为 $[-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$
C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ 的最大值为 9
D. 若 B, C 为平面上的定点, 则 A 点的轨迹长度为 $\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .若 $a=3, b=5, \sin B=\frac{5}{9}$,则 $\cos A=$ _____.

14. 已知点 $A(0,2), B(2,3), C(3,3), D(6,7)$,则 AB 在 CD 上的投影向量为_____.(用坐标表示)

15. 已知函数 $f(x)$ 满足 $y=f(x+1)-1$ 为奇函数,则函数 $f(x)$ 的解析式可能为_____(写出一个即可).

16. 已知正三棱锥 $A-BCD$ 的侧棱长为3, $\angle BAC=\angle BAD=\angle CAD=\frac{\pi}{2}$.过顶点 A 作底面 BCD 的垂线,垂足为 E ,过点 E 作侧面 ABC 的垂线,垂足为 F ,过点 F 作平面 ABD 的垂线,垂足为 G ,连接相关线段形成四面体 $AEFG$,则四面体 $AEFG$ 的外接球的表面积为_____.

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)已知 $|a|=3, |b|=2$,向量 a, b 的夹角为 $60^\circ, c=2a+3b, d=ma-2b$,其中 $m \in \mathbb{R}$.

(1)若 $c \parallel d$,求实数 m 的值;

(2)若 $c \perp d$,求实数 m 的值.

18. (12分)在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, 2\sin A - \sqrt{3}\cos C = \frac{\sqrt{3}\sin C}{\tan B}$.

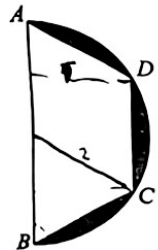
(1)求 B 的大小;

(2)若 B 为锐角,求 $\sin A + \sin B + \sin C$ 的取值范围.

19. (12分)意大利数学家卡瓦里在《不可分量几何学》中讲解了通过平面图形旋转计算体积的方法.如图, AB 为半圆的直径, C, D 为半圆弧上的点, $AB=4, \angle CBA = \angle BAD = 60^\circ$,阴影部分为弦 BC, CD, DA 与半圆弧所形成的弓形.将该几何图形绕着直径 AB 所在直线旋转一周,阴影部分旋转后会形成一个几何体.

(1)写出该几何体的主要结构特征(至少两条);

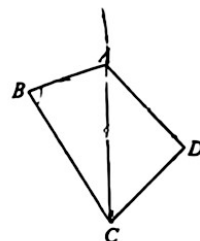
(2)计算该几何体的体积.



20. (12 分) 某地政府为了解决停车难问题, 在一块空地上规划建设一个四边形停车场. 如图, 经过测量 $AB=2, BC=6, CD=4, DA=4$, 中间 AC 是一条道路, 其面积忽略不计.

(1) 求 $3\cos B - 4\cos D$ 的值;

(2) $\triangle ABC, \triangle ACD$ 的面积分别记为 S_1, S_2 , 求 $S_1^2 + S_2^2$ 的最大值.

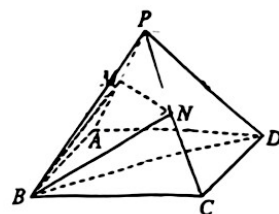


21. (12 分) 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=2, AB=\sqrt{2}$, M, N 分别为 PA, PC 的中点.

(1) 证明: 平面 $PBD \perp$ 平面 BMN ;

(2) 求直线 PB 与平面 BMN 所成角的正弦值;

(3) 求该四棱锥被平面 BMN 所截得的两部分体积之比 $\frac{V_1}{V_2}$, 其中 $V_1 < V_2$.



22. (12 分) (1) 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ ($x > 0, a \in \mathbb{R}$), 指出函数 $f(x)$ 的单调性. (不需要证明过程);

(2) 若关于 θ 的方程 $\sin^2 2\theta + k \sin 2\theta + \sqrt{2}k \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \sin 2\theta + 4 \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2k(\sin \theta + \cos \theta) + k = 0$

在 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 有实数解, 求实数 k 的最大值.