东北育才学校科学高中部2023-2024学年度高考适应性测试（一）

数学参考答案

1．C

【分析】根据复数实部定义、复数的几何意义、模长的计算和共轭复数定义依次判断各个选项即可.

【详解】对于A，$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，则实部为$-1$，A错误；

对于B，$e^{2i}=\cos2+i\sin2$对应的点为$(\cos2,\sin2)$，

$\because \cos2<0$，$\sin2>0$，$\therefore e^{2i}$对应的点位于第二象限，B错误；

对于C，$\left|e^{i\theta}\right|=|\cos\theta+i\sin\theta|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$，C正确；

对于D，$e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$，则其共轭复数为$\cos\pi-i\sin\pi=-1$，D错误.

故选：C.

2．D

【分析】利用三角恒等变换公式和正弦定理，把p中等式化为$\sin2A=\sin2B$，从而$\cos(A+B)\sin(A-B)=0$，得$C=\frac{\pi}{2}$或$A=B$，然后结合充分条件和必要条件的定义进行判断.

【详解】根据正弦定理可得$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$，

所以$\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{b\cos(A+C)}{a}=\frac{1-\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}}+\frac{\sin B\cos(\pi-B)}{\sin A}$

$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}-\frac{\sin B\cos B}{\sin A}=\cos A-\frac{\sin B\cos B}{\sin A}$

$=\frac{\cos A\sin A}{\sin A}-\frac{\sin B\cos B}{\sin A}=\frac{\frac{1}{2}\sin2A}{\sin A}-\frac{\frac{1}{2}\sin2B}{\sin A}=0$

所以$\sin2A=\sin2B$，

即$\sin[(A+B)+(A-B)]=\sin[(A+B)-(A-B)]$，

$\sin(A+B)\cos(A-B)+\cos(A+B)\sin(A-B)=\sin(A+B)\cos(A-B)-\cos(A+B)\sin(A-B)$

整理得$\cos(A+B)\sin(A-B)=0$，则$\cos(A+B)=0$或$\sin(A-B)=0$，

因为$0<A<\pi$，$0<B<\pi$，$0<A+B<\pi$，$-\pi<A-B<\pi$，

则$A+B=\frac{\pi}{2}$或$A-B=0$，即$C=\frac{\pi}{2}$或$A=B$，所以由p不能推出q；

当$\triangle ABC$为等腰三角形时，C不一定为$\dfrac{\pi}{2}$，A,B也不一定相等，所以由q不能推出p，

故p是q的既不充分也不必要条件.

故选：D

3．A

【分析】通过图形可知阿基米德多面体是由六个全等的正方形和八个全等的等边三角形构成，分别求解正方形和等边三角形面积，加和即可.

【详解】由题意知：阿基米德多面体是由六个全等的正方形和八个全等的等边三角形构成，

其中正方形边长和等边三角形的边长均为$\sqrt{20^2+20^2}=20\sqrt{2}$；

$\therefore$阿基米德多面体的表面积$S=6\times\left(20\sqrt{2}\right)^2+8\times\dfrac{1}{2}\times20\sqrt{2}\times20\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4800+1600\sqrt{3}\left(cm^2\right)$.

故选：A.

4．B

【分析】将所有图形均以矩形的中心为原点，以对称轴为y轴建立平面直角坐标系，根据在y轴的最短和最长距离与双曲线实轴长和几何体Γ母线长对比可排除③④；假设$y=t\left(\sqrt{5}<t<3\right)$，与双曲线$C$相交后旋转，可求得圆环面积；分别在①②中求得$y=t\left(\sqrt{5}<t<3\right)$与图形相交所得的弦长，根据旋转后的圆环面积和圆面积是否与已知的圆环面积相等来判断出结果.

【详解】由$\begin{cases}y^2-x^2=5\\x=2\end{cases}$得：$y=\pm3$，

则当$y=t\left(\sqrt{5}<t<3\right)$与$C$相交于两点时，内圆半径$r=\sqrt{t^2-5}$，则在该位置旋转一周所得圆环面积为

$4\pi-\left(t^2-5\right)\pi=\left(9-t^2\right)\pi$；

将所有图形均以矩形的中心为原点，以对称轴为y轴建立平面直角坐标系，

对于③，双曲线实轴长为$2\sqrt{5}$，③中y轴的最短距离为$6-2\sqrt{3^2-2^2}=6-2\sqrt{5}$，不合题意，③错误；

对于④，几何体Γ母线长为6，④中y轴的最长距离为$2\sqrt{5}+2\sqrt{3^2-2^2}=4\sqrt{5}$，不合题意，④错误；

对于①，在y轴的最短距离为$6-2\times\left(3-\sqrt{3^2-2^2}\right)=2\sqrt{5}$，母线长为$6$，与几何体$\Gamma$吻合；

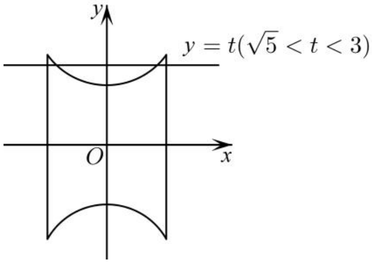
当$y=t\left(\sqrt{5}<t<3\right)$与①中图形相交时，两交点之间距离为$2\sqrt{3^2-\left(3+\sqrt{5}-t\right)^2}$，

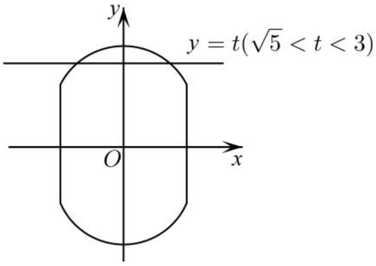
此时圆环面积为$4\pi-\left(3^2+\left(3+\sqrt{5}-t\right)^2\right)\pi=\left(-t^2+2\left(3+\sqrt{5}\right)t-14-2\sqrt{5}\right)\pi$，不合题意，①错误

对于②，在y轴的最长距离为$2\sqrt{5}+2\times\left(3-\sqrt{3^2-2^2}\right)=6$，矩形高为$2\sqrt{5}$，与几何体$\Gamma$吻合；

当$y=t\left(\sqrt{5}<t<3\right)$与②中图形相交时，两交点之间距离为$2\sqrt{3^2-t^2}=2\sqrt{9-t^2}$，

此时圆面积为$\left(9-t^2\right)\pi$，与圆环面积相同，满足题意，②正确.





故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题以祖暅原理为载体，考查了旋转体截面面积的求解问题；解题关键是能够充分理解祖暅原理，根据直线与平面图形的相交弦来确定旋转后所得的图形，并求得图形面积，根据“幂势既同，则积不容异”来得到结论.

5．C

【分析】由题设条件有$\frac{|3a+4b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{3}{5b}+\frac{4}{5a}-\frac{1}{5ab}|$，令$x=\frac{1}{a}>0,y=\frac{1}{b}>0$则有$\frac{|3a+4b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{5}|4x+3y-xy|$、$x^2+y^2=25$，应用基本不等式求$xy$范围且$t=4x+3y-xy\ge 4\sqrt{3xy}-xy$恒成立，进而求$t$的范围，即可得结果.

【详解】由$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=25$，则$a^2+b^2=25a^2b^2$，且$a,b>0$，

所以$\frac{|3a+4b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3a+4b-1|}{5ab}=\left|\frac{3}{5b}+\frac{4}{5a}-\frac{1}{5ab}\right|$，

令$x=\frac{1}{a}>0,y=\frac{1}{b}>0$，则$\frac{|3a+4b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{5}|4x+3y-xy|$，且$x^2+y^2=25$，

所以$x^2+y^2=25\ge 2xy$，即$xy\le\frac{25}{2}$，仅当$x=y=\frac{5}{\sqrt{2}}$时等号成立，

对于$t=4x+3y-xy\ge 4\sqrt{3xy}-xy$恒成立，仅当$4x=3y$，即$x=3,y=4$时等号成立，

综上，若$k=\sqrt{xy}\in(0,\frac{5}{\sqrt{2}}]$，则$y=4\sqrt{3}k-k^2=-(k-2\sqrt{3})^2+12$，

而$2\sqrt{3}-0>\frac{5}{\sqrt{2}}-2\sqrt{3}>0$，则$y\in(0,12]$，只需$t\ge y_{\max}$，

所以$t\ge 12$，仅当$k=2\sqrt{3}$，即$x=3,y=4$时等号成立，

综上，$\frac{|3a+4b-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{5}|t|=\frac{t}{5}\ge\frac{12}{5}$，仅当$t=12$，即$a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{4}$时等号成立.

所以目标式最小值为$\frac{12}{5}$.

故选：C

6．A

【分析】先求得a_n，然后等比数列的前n项和公式求得S_n，进而求得正确答案.

【详解】依题意$a_1=1$，$x_n>2$，

$f\left(x\right)=x^2-x-2$， $f'\left(x\right)=2x-1$，

依题意 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$，

即 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-x_n-2}{2x_n-1}$，

则 $x_{n+1}+1=x_n-\dfrac{x_n^2-x_n-2}{2x_n-1}+1=\dfrac{\left(x_n+1\right)^2}{2x_n-1}$，

$x_{n+1}-2=x_n-\dfrac{x_n^2-x_n-2}{2x_n-1}-2=\dfrac{\left(x_n-2\right)^2}{2x_n-1}$（由于 $x_n>2$，所以 $x_{n+1}\neq 2$），

则 $\dfrac{x_{n+1}+1}{x_{n+1}-2}=\dfrac{\left(x_n+1\right)^2}{\left(x_n-2\right)^2}$，

两边取对数得 $\ln\dfrac{x_{n+1}+1}{x_{n+1}-2}=\ln\left(\dfrac{x_n+1}{x_n-2}\right)^2=2\ln\dfrac{x_n+1}{x_n-2}$， 即 $a_{n+1}=2a_n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=1$，公比为2的等比数列，所以 $a_n=2^{n-1}$.

所以 $S_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，所以 $S_{2022}=2^{2022}-1$.

故选：A

7．C

【分析】由已知条件求得解得 b， c， $\cos A$，再求得 $\left|\overrightarrow{CB}\right|$，可得到 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$，用基本不等式求 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值.

【详解】设 $|\overrightarrow{AB}|=c$， $|\overrightarrow{AC}|=b$，根据题意得 $\begin{cases} bc\cos A=9 \\ b=c\cos A \\ \dfrac{1}{2}bc\sin A=6 \end{cases}$，

解得 $b=3$， $c=5$， $\sin A=\dfrac{4}{5}$， $\cos A=\dfrac{3}{5}$，

$\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{c^2+b^2-2bc\cos A}=\sqrt{5^2+3^2-2\times5\times3\times\dfrac{3}{5}}=4$

$\therefore\ \overrightarrow{CP}=x\cdot\dfrac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+y\cdot\dfrac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{x}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{y}{4}\overrightarrow{CB}$，

又 $\because A$、 P、 B 三点共线， $\therefore\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$，

$\therefore\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4})(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y})=\dfrac{11}{12}+\dfrac{x}{3y}+\dfrac{y}{2x}\geq\dfrac{11}{12}+2\sqrt{\dfrac{x}{3y}\cdot\dfrac{y}{2x}}=\dfrac{11}{12}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

当且仅当$\begin{cases}\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1\\ \dfrac{x}{3y}=\dfrac{y}{2x}\end{cases}$，即$\begin{cases}x=\dfrac{6\times\left(4-\sqrt{6}\right)}{5}\\ y=\dfrac{4\times\left(2\sqrt{6}-3\right)}{5}\end{cases}$时，等号成立.

故选：C

【点睛】关键点睛：解题的关键是由已知条件求出a,b,c后，再由A,P,B三点共线，得$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1$，所以

$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\right)$化简后结合基本不等式可求出其最小值，

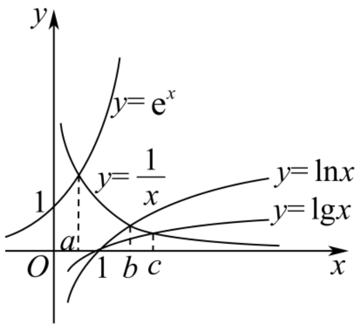
8．C

【分析】分别作出函数$y=\mathrm{e}^x$，$y=\ln x$，$y=\lg x$图像，根据三个图像分别与函数$y=\dfrac{1}{x}$图像交点情况比较大小.

【详解】由$a\cdot\mathrm{e}^a=b\cdot\ln b=c\cdot\lg c=1$，

得$\dfrac{1}{a}=\mathrm{e}^a$，$\dfrac{1}{b}=\ln b$，$\dfrac{1}{c}=\ln c$，

分别作函数$y=\mathrm{e}^x$，$y=\ln x$，$y=\lg x$图像，如图所示，



它们与函数$y=\dfrac{1}{x}$图像交点的横坐标分别为a，b，c，

有图像可得$a<b<c$，

故选：C.

9．AC

【分析】由正态分布密度函数可知$\mu=100$，$\sigma=10$，则可判断出AB选项，再由正态曲线的特征即可判断出CD选项.

【详解】因为正态分布密度函数为$\varphi\left(x\right)=\dfrac{1}{10\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-100)^2}{200}}$，

所以$\mu=100$，$\sigma=10$，即均值为100，标准差为10，方差为100，故A正确，B错误；

根据正态曲线的特征可知函数$\varphi\left(x\right)$关于$x=100$轴对称，所以该地杂交水稻株高在120cm以上的数量和株高在80cm以下的数量一样多，故C正确，

随机测量该地的一株杂交水稻，其株高在$(80,90)$和在$(110,120)$的概率一样大.故D错误.

故选：AC.

10．AD

【分析】根据反正弦函数和反余弦函数的图象与性质，逐项判定，即可求解.

【详解】对于 A 中，因为正、余弦函数的值域均为$[-1,1]$，所以“反正弦函数”与“反余弦函数”的定义域均为$[-1,1]$，即 A 正确；

对于 B 中，因为正弦函数$y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$单调递增，所以$y$增大时，$x$也增大，即“反正弦函数”单调递增，同理可知，“反余弦函数”单调递减，即 B 错误；

对于 C 中，由 B 可知，“反余弦函数”单调递减，不可能是偶函数，即 C 错误；

对于 D 中，设$\arcsin x_1=\alpha$，$\arccos x_2=\beta$，则$\sin\alpha=x_1$，$\cos\beta=x_2$，

因为x_1，$x_2>0$，所以α，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，又由$x_1^2+x_2^2=1$，则$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$，

即$\sin^2\alpha=\sin^2\beta$，所以$\sin\alpha=\sin\beta$，则$\alpha=\beta$，即$\arcsin x_1=\arccos x_2$，即 D 正确.

故选：AD

11．AD

【分析】根据向量共线定理的推论，得到$\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{t+1}{t}\cdot\frac{m}{m+1}+\frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{m}{m+1}=1$，$\frac{t}{1+t}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}+\frac{1}{1+t}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}=1$，代入相应的变量的值，求出其他变量，从而判断 AB 选项，对上式变形得到$\frac{t\lambda+t}{t\lambda+\lambda}+\frac{1}{1+t}=1+\frac{1}{\mu}$，假设$\frac{1}{\lambda}-\frac{2}{t}=1$成立，推导出$\frac{1}{\lambda}=0$，得到矛盾，故 C 错误，根据向量共线定理的推论得到$\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\mu+1}{\mu}\cdot\frac{m}{m+1}+\frac{1}{1+m}\cdot\frac{\mu+1}{\mu}=1$，$\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\frac{m+1}{m}\cdot\frac{t}{t+1}+\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{m+1}{m}=1$，变形得到$\frac{t\mu}{(1+\mu)(1+t)}=\frac{\lambda m}{(1+m)(1+\lambda)}$.

【详解】由题意得：$\overrightarrow{AC}=\frac{t+1}{t}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{m+1}{m}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QC}$，

$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=\lambda\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ}\right)$，即$\overrightarrow{AQ}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$

即$\frac{m+1}{m}\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{t+1}{t}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{t+1}{t}\cdot\frac{m}{m+1}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{m}{m+1}\overrightarrow{AB}$，

因为B,D,P三点共线，

所以$\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{t+1}{t}\cdot\frac{m}{m+1}+\frac{1}{1+\lambda}\cdot\frac{m}{m+1}=1$，

当$t=\frac{1}{2}$且$\lambda=3$时，$\frac{3}{1+3}\cdot\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{m}{m+1}+\frac{1}{1+3}\cdot\frac{m}{m+1}=1$，

解得：$m=\frac{2}{3}$，

$\overrightarrow{BP}=\frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BC}=\frac{\lambda+1}{\lambda}\overrightarrow{BQ}$，

$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{PC}$，所以$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}=t\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}\right)$，

即$\overrightarrow{BP}=\frac{t}{1+t}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{1+t}\overrightarrow{BA}$，

即$\frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{BD}=\frac{t}{1+t}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\overrightarrow{BQ}+\frac{1}{1+t}\overrightarrow{BA}$,

所以$\overrightarrow{BD}=\frac{t}{1+t}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{BQ}+\frac{1}{1+t}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{BA}$ ，

因为A,D,Q三点共线，

所以$\frac{t}{1+t}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}+\frac{1}{1+t}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}=1$，

当$t=\frac{1}{2}$且$\lambda=3$时，$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\cdot\frac{3+1}{3}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}=1$，

解得：$\mu=9$，

故 A 正确；

若$\mu=2$且$m=1$时，$\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{t+1}{t}+\frac{1}{1+\lambda}=2$，$\frac{t}{1+t}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}+\frac{1}{1+t}=\frac{3}{2}$，

解得：$\lambda=\frac{1}{2},t=\frac{1}{3}$，B 错误；

$\frac{t}{1+t}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}+\frac{1}{1+t}\cdot\frac{\mu}{\mu+1}=1$，变形为：$\frac{t\lambda+t}{t\lambda+\lambda}+\frac{1}{1+t}=1+\frac{1}{\mu}$，①

若$\frac{1}{\lambda}-\frac{2}{t}=1$时，则$t-2\lambda=\lambda t$，代入①式得：$\frac{1}{\mu}-\frac{1}{1+t}=1$

假设$\frac{1}{\mu}-\frac{2}{t}=1$成立，则$\frac{1}{1+t}=\frac{2}{t}$，解得：$t=-2$，

此时$\frac{1}{\lambda}=0$，显然无解，故假设不成立，故 C 错误；

同理可得：$\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{\mu+1}{\mu}\cdot\frac{m}{m+1}+\frac{1}{1+m}\cdot\frac{\mu+1}{\mu}=1$，$\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\frac{m+1}{m}\cdot\frac{t}{t+1}+\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{m+1}{m}=1$，

所以$\frac{\mu}{1+\mu}\cdot\frac{t}{t+1}=\frac{m}{m+1}-\frac{1}{1+\mu}=\frac{m\mu-1}{(m+1)(1+\mu)}$，$\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{m}{m+1}=\frac{\mu}{\mu+1}-\frac{1}{1+m}=\frac{m\mu-1}{(m+1)(1+\mu)}$，

所以$\frac{t\mu}{(1+\mu)(1+t)}=\frac{\lambda m}{(1+m)(1+\lambda)}$

D 正确.

故选：AD

【点睛】利用向量共线定理的推论得到关系式，然后解决向量的倍数关系，本题中要能在多个等式中进行适当变形，然后找到等量关系

12．CD

【分析】根据“跟随区间”的定义对选项逐一分析，根据函数的单调性、值域等知识确定正确答案.

【详解】对于 A 选项，若$[1,a]$为$f(x)=x^2-2x+2$的跟随区间，

因为$f(x)=x^2-2x+2$在区间$[1,a]$为增函数，故其值域为$[1,a^2-2a+2]$，

根据题意有$a^2-2a+2=a$，解得$a=1$或$a=2$，因为$a>1$故$a=2$.故 A 错误.

对于 B 选项，由题，因为函数 $f(x)=\frac{9}{2}-\frac{2}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上均为增函数，

若 $f(x)=\frac{9}{2}-\frac{2}{x}$ 存在跟随区间 $[a,b]$ 则有 $\begin{cases} a=\frac{9}{2}-\frac{2}{a} \\ b=\frac{9}{2}-\frac{2}{b} \end{cases}$，即 a,b 为 $x=\frac{9}{2}-\frac{2}{x}$ 的两根.

即 $2x^2-9x+4=0$ 的根.故 $a=\frac{1}{2},b=4$.故 B 错误.

对于 C 选项，若函数 $f(x)=m-\sqrt{x+1}$ 存在跟随区间 $[a,b]$，

因为 $f(x)=m-\sqrt{x+1}$ 为减函数，

故由跟随区间的定义可知 $\begin{cases} b=m-\sqrt{a+1} \\ a=m-\sqrt{b+1} \end{cases} \Rightarrow a-b=\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}$，

即 $(a-b)\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}\right)=(a+1)-(b+1)=a-b$，

因为 $a<b$，所以 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=1$.

易得 $0\le\sqrt{a+1}<\sqrt{b+1}\le1$.

所以 $a=m-\sqrt{b+1}=m-\left(1-\sqrt{a+1}\right)$，

令 $t=\sqrt{a+1}$ $(t\in[0,1])$ 代入化简可得 $t^2-t-m=0$，

同理 $t=\sqrt{b+1}$ 也满足 $t^2-t-m=0$，

即 $t^2-t-m=0$ 在区间 $[0,1]$ 上有两不相等的实数根.

故 $\begin{cases} 1+4m>0 \\ -m\ge0 \end{cases}$，解得 $m\in\left(-\frac{1}{4},0\right]$，故 C 正确.

对于 D 选项，若 $f(x)=-x^2+2x$ 存在“3 倍跟随区间”，则可设定义域为 $[a,b]$，值域为 $[3a,3b]$.

当 $a<b\le1$ 时，易得 $f(x)=-x^2+2x$ 在区间上单调递增，

此时易得 a,b 为方程 $3x=-x^2+2x$ 的两根，

求解得 $x=-1$ 或 $x=0$.故定义域 $[-1,0]$，则值域为 $[-3,0]$. D 正确.

故选：CD

【点睛】关于新定义函数类型问题的求解，主要的解题思路是理解新定义，并将新定义的知识转化为学过的知识来进行求解，如本题中新定义的“跟随区间”，根据它的定义，可转化为函数的定义域和值域问题来进行求解.

13．190

【分析】利用第八项为 1 出发，按照规则，逆向逐项即可求解 n 的所有可能的取值.

【详解】设对正整数 n 按照上述变换，得到数列：$a_1,a_2,\cdots,a_7,a_8$，则：

$$a_8=1\Rightarrow a_7=2\Rightarrow a_6=4\Rightarrow\begin{cases}a_5=8\Rightarrow a_4=16\Rightarrow\begin{cases}a_3=32\Rightarrow a_2=64\Rightarrow\begin{cases}a_1=128\\a_1=21\end{cases}\\a_3=5\Rightarrow a_2=10\Rightarrow\begin{cases}a_1=20\\a_1=3\end{cases}\end{cases}\\a_5=1\Rightarrow a_4=2\Rightarrow a_3=4\Rightarrow\begin{cases}a_2=8\Rightarrow a_1=16\\a_2=1\Rightarrow a_1=2\end{cases}\end{cases}$$

则 n 的所有可能取值为 $2,3,16,20,21,128$，共 6 个.其和为 $2+3+16+20+21+128=190$，

故答案为：190.

14．30

【分析】利用二项式定理的原理与组合的意义求解即可.

【详解】因为 $\left(1+x-x^2\right)^{10}=a_0+a_1x+\cdots+a_{20}x^{20}$，所以 a_3 是含 x^3 项的系数，

若从 10 个 $\left(1+x-x^2\right)$ 式子中取出 0 个 $\left(-x^2\right)$，则需要从中取出 3 个 x，7 个 1，则得到的项为 $C_{10}^0\left(-x^2\right)^0C_{10}^3x^3C_7^71^7=120x^3$；

若从 10 个 $\left(1+x-x^2\right)$ 式子中取出 1 个 $\left(-x^2\right)$，则需要从中取出 1 个 x，8 个 1，则得到的项为 $C_{10}^1\left(-x^2\right)C_9^1xC_8^81^8=-90x^3$；

若从 10 个 $\left(1+x-x^2\right)$ 式子中取出大于或等于 2 个 $\left(-x^2\right)$，则无法得到含 x^3 的项；

综上：含 x^3 的项为 $120x^3-90x^3=30x^3$，则含 x^3 项的系数为 30，即 $a_3=30$.

故答案为：30.

15．13π

【分析】翻折前，将直线 l 的方程与抛物线的方程联立，求出点 A、B 的坐标，然后以以原坐标原点 O 为原点，原纵轴的负半轴所在直线为 x 轴，直线 OP 所在直线为 y 轴，过点 O 且垂直于平面 OPB 的直线作 z 轴建立空间直角坐标系，设球心为 $G(a,b,c)$，根据球心的性质可得出关于 a、b、c 的方程组，解出这三个未知数的值，可得出球心的坐标，可求得球的半径，利用球体的表面积公式可求得结果.

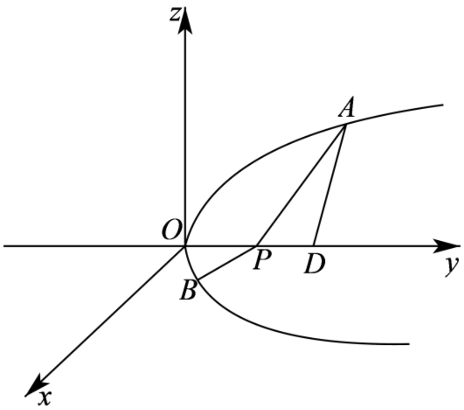
【详解】翻折前，设点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $y_1>0$，直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，

联立 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1)\\y^2=\dfrac{3}{2}x\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_1=2\\y_1=\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}\\y_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，即点 $A\left(2,\sqrt{3}\right)$、$B\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

易知点 $D(2,0)$，

翻折后，以原坐标原点 O 为原点，原纵轴的负半轴所在直线为 x 轴，直线 OP 所在直线为 y 轴，

过点 O 且垂直于平面 OPB 的直线作 z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $P(0,1,0)$、$D(0,2,0)$、$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$、$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2,\frac{3}{2}\right)$，

设四棱锥 $P-ABD$ 的外接球球心为 $G(a,b,c)$，

由题意可得 $\begin{cases} a^2+(b-1)^2+c^2=a^2+(b-2)^2+c^2 \\ a^2+(b-1)^2+c^2=\left(a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+c^2 \\ a^2+(b-1)^2+c^2=\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(b-2)^2+\left(c-\frac{3}{2}\right)^2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{3}{2} \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}$，

所以，球心为 $G\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，所以，球 G 的半径为 $|PG|=\sqrt{\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

因此，球 G 的表面积为 $4\pi|AG|^2=13\pi$.

故答案为：13π.

【点睛】方法点睛：求空间多面体的外接球半径的常用方法：

①补形法：侧面为直角三角形，或正四面体，或对棱二面角均相等的模型，可以还原到正方体或长方体中去求解；

②利用球的性质：几何体中在不同面均对直角的棱必然是球大圆直径，也即球的直径；

③定义法：到各个顶点距离均相等的点为外接球的球心，借助有特殊性底面的外接圆圆心，找其垂线，则球心一定在垂线上，再根据带其他顶点距离也是半径，列关系求解即可；

④坐标法：建立空间直角坐标系，设出外接球球心的坐标，根据球心到各顶点的距离相等建立方程组，求出球心坐标，利用空间中两点间的距离公式可求得球的半径.

16. $\frac{21\sqrt{3}}{16}$；　$\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\left[\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4}{9}-\left(\frac{n}{3}+\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

【分析】依题可知，各等边三角形的面积成等比数列，公比为 $\frac{1}{4}$，首项为 $\sqrt{3}$，即可求出 S_3 以及 S_n，再根据分组求和法以及错位相减法求出 $\sum_{i=1}^{n} iS_i$.

【详解】依题可知，各等边三角形的面积形成等比数列，公比为 $\frac{1}{4}$，首项为 $\sqrt{3}$，所以

$S_n=\dfrac{\sqrt{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$，即 $S_3=\dfrac{21\sqrt{3}}{16}$；

$\sum_{i=1}^{n} iS_i=\sum_{i=1}^{n} i\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^i\right]=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\left[\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{4^i}\right)\right]$，而 $\sum_{i=1}^{n} i=\dfrac{n(n+1)}{2}$，设

$T_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{4^i}\right)=1\times\frac{1}{4}+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

$\frac{1}{4}T_n=0+1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$，作差得：

$\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}-\left(n+\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$，所以 $T_n=\frac{4}{9}-\left(\frac{n}{3}+\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$，所以

$\sum_{i=1}^{n} iS_i=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\left[\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{4}{9}-\left(\dfrac{n}{3}+\dfrac{4}{9}\right)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$.

故答案为：$\dfrac{21\sqrt{3}}{16}$；$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\left[\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{4}{9}-\left(\dfrac{n}{3}+\dfrac{4}{9}\right)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]$.

17．(1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}$，证明见解析

(2) $a_n=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$

【分析】(1) 由题意可得 $P_n\left(a_n,\dfrac{2a_n}{a_n+1}\right)$，从而有 $Q_n\left(a_{n+1},\dfrac{2a_n}{a_n+1}\right)$，再根据 Q_n 在 $y=\dfrac{1}{3x}$ 上，即可得 a_{n+1} 与 a_n 之间的关系，根据 $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{6a_n}$，可得 $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}$ 与 $a_n-\dfrac{1}{2}$ 异号，再结合 $0<a_1<\dfrac{1}{2}$，即可得证；

(2) 根据 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}$，可得 $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{6a_n}, a_{n+1}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3\left(a_n+\frac{1}{3}\right)}{6a_n}$，两式相除，利用构造法结合等比数列的通项即可得解.

【详解】(1) 由已知，$P_n\left(a_n,\dfrac{2a_n}{a_n+1}\right)$，从而有 $Q_n\left(a_{n+1},\dfrac{2a_n}{a_n+1}\right)$，

因为 Q_n 在 $y=\dfrac{1}{3x}$ 上，所以有 $\dfrac{2a_n}{a_n+1}=\dfrac{1}{3a_{n+1}}$，

所以 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}$，

由 $a_1>0$ 及 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}$，知 $a_n>0$，下证：$a_{2n-1}<\dfrac{1}{2}<a_{2n}$，

因为 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{-2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{6a_n}$，所以 $a_{n+1}-\frac{1}{2}$ 与 $a_n-\frac{1}{2}$ 异号，

因为 $0<a_1<\frac{1}{2}$，所以 $a_1-\frac{1}{2}<0$，所以 $a_{2n-1}-\frac{1}{2}<0, a_{2n}-\frac{1}{2}>0$，

即 $a_{2n-1}<\frac{1}{2}<a_{2n}$；

（2）由 $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{6a_n}$

可得 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{a_n+1}{6a_n}-\frac{1}{2}=\frac{-2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{6a_n}, a_{n+1}+\frac{1}{3}=\frac{a_n+1}{6a_n}+\frac{1}{3}=\frac{3\left(a_n+\frac{1}{3}\right)}{6a_n}$，

两式相除得 $\frac{a_{n+1}-\frac{1}{2}}{a_{n+1}+\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}$，

又 $\frac{a_1-\frac{1}{2}}{a_1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}$，

所以 $\left\{\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{4}$ 为首项，以 $-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列，

则 $\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，解得 $a_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$.

18．(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

【分析】（1）根据已知等式结合正弦定理、诱导公式、三角恒等变换，即可得角 A 的大小；

（2）选择条件①，利用三角形的外心为 M，根据正弦定理、余弦定理可得 $\triangle ABC$ 为等边三角形，再利用面积公式可得 $\triangle ABC$ 的面积；选择条件②，利用三角形的内心为 M，利用等面积法求得 $b+c=\frac{2bc}{3}$，再根据余弦定理得 $bc=9$，即可求得 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】（1）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $a=6$，所以 $b+2a\cos B=2c$，

由正弦定理，得 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin C$，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B+2\sin A\cos B=2\sin(A+B)$，

化简，得 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）选条件①：

设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，

则在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$2R=\dfrac{BC}{\sin A}=2\sqrt{3}$，即$R=\sqrt{3}$，

由题意知：$BM=CM=\sqrt{3},BC=3$，

由余弦定理知：$\cos\angle BMC=\dfrac{3+3-9}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$\angle BMC=\dfrac{2\pi}{3},\angle MBD=\dfrac{\pi}{6}$.

在$\triangle BDM$中，由正弦定理知：$\sin\angle BDM=\dfrac{BM}{MD}\sin\angle MBD=1$，

所以$\angle BDM=\dfrac{\pi}{2}$，

从而$MD\perp BC$，所以$\triangle ABC$为等边三角形，

$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}\times3^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

选条件②：

由条件知：$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，得$\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}c\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}b\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}$，

因为$AD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}(b+c)$，即$b+c=\dfrac{2bc}{3}$，

由（1）可得$b^2+c^2-9=bc$，即$(b+c)^2-3bc=9$，

所以$\left(\dfrac{2bc}{3}\right)^2-3bc-9=0,4(bc)^2-27bc-81=0$，即$(4bc+9)(bc-9)=0$，

又因为$bc>0$，所以$bc=9$，

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times9\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

19．(1) $\hat{y}=0.71x+1.87$，残差为0.18

(2)选用$\hat{y}=0.107x^2+2.365$更好，17.773 亿元

(3)逐年递增

【分析】（1）应用最小二乘法求回归直线方程即可；

（2）由相关指数的大小，结合其的实际意义确定较好模型，进而估计 2023 年该市的地区生产总值；

（3）由题设可得该市人均地区生产总值$\varphi=0.535(x+6)+\dfrac{31.085}{x+6}-6.42$，利用单调性定义判断其在$[18,+\infty)$上的单调性即可.

【详解】（1）由数据，$\bar{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\bar{y}=\dfrac{2.8+3.1+3.9+4.6+5.6}{5}=4$，

而$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=2.8+6.2+11.7+18.4+28=67.1$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=1+4+9+16+25=55$，

所以$\hat{b}=\dfrac{67.1-5\times3\times4}{55-5\times3^2}=0.71$，则$\hat{a}=4-0.71\times3=1.87$，

综上，回归方程为$\hat{y}=0.71x+1.87$，

当$x=5$时，$\hat{y}=0.71\times5+1.87=5.42$，故 2016 年地区生产总值残差为$5.6-5.42=0.18$.

（2）根据相关指数越大拟合越好，由于$0.985>0.976>0.880$，故$\hat{y}=0.107x^2+2.365$模型较好，

因 2023 年对应$x=12$，则$\hat{y}=0.107\times12^2+2.365=17.773$亿元.

（3）由（2）及题设知：该市人均地区生产总值

$\varphi=\dfrac{0.107x^2+2.365}{0.2x+1.2}=\dfrac{0.535(x+6)^2-6.42(x+6)+31.085}{x+6}=0.535(x+6)+\dfrac{31.085}{x+6}-6.42$，

令$t=x+6\geq18$，且$y=0.535t+\dfrac{31.085}{t}$，若$t_2>t_1\geq18$，

所以$y_2-y_1=0.535(t_2-t_1)+\dfrac{31.085(t_1-t_2)}{t_1t_2}=(t_2-t_1)(0.535-\dfrac{31.085}{t_1t_2})$，

而$t_2-t_1>0,t_1t_2\geq18\times19=342$且，则$0.535-\dfrac{31.085}{t_1t_2}>0$，故$y_2>y_1$，

所以$y=0.535t+\dfrac{31.085}{t}$在$[18,+\infty)$上递增，则$\varphi$在$[18,+\infty)$上递增，

所以该市人均地区生产总值逐年递增.

20．(1) 2π

(2)（i）$S(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+4x^2}-3x+12,x\in(0,2)$；（ii）$\dfrac{23}{27}$

【分析】（1）根据弯曲度、曲率的定义求得正确答案.

（2）（i）结合多面体的表面积的求法求得$S(x)$；（ii）利用导数求得蜂房表面积最小时BH的值.令$\angle ASC=\theta$，利用余弦定理求得$\cos\theta$，结合三角恒等变换的知识求得顶点S的曲率的余弦值.

【详解】（1）蜂房曲顶空间的弯曲度为顶端三个菱形的 7 个顶点的曲率之和，

根据定义其度量值等于$7\times2\pi$减去三个菱形的内角和$3\times2\pi$，

再减去 6 个直角梯形中的两个非直角内角和$6\times\pi$，

即蜂房曲顶空间的弯曲度为$7\times2\pi-3\times2\pi-6\pi=2\pi$.

（2）（i）如图所示，连接AC，SH，则$AC=\sqrt{3}$，设点S在平面ACE的射影为O，

则$OB=1$，则$SH=2\sqrt{AB^2+BH^2-\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2}=\sqrt{1+4x^2}$，

菱形$SAHC$的面积为$S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+4x^2}$，

侧面积 $6\times\frac{2+(2-x)}{2}\times1=3(4-x)=12-3x$，

所以蜂房的表面积为 $S(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+4x^2}-3x+12, x\in(0,2)$.

（ii） $S'(x)=\frac{6\sqrt{3}x}{\sqrt{1+4x^2}}-3=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}-3=\frac{3}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)$,

令 $S'(x)=0$ 得到 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $S(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $S'(x)<0$, $S(x)$ 递增；在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},2\right)$, $S'(x)>0$, $S(x)$ 递增.

所以 $S(x)$ 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 处取得极小值，也即是最小值.

此时 $SA=SC=\sqrt{1+x^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，在 $\triangle SAC$ 中，令 $\angle ASC=\theta$，由余弦定理得 $\cos\theta=\frac{SA^2+SC^2-AC^2}{2\times SA\times SC}=-\frac{1}{3}$，

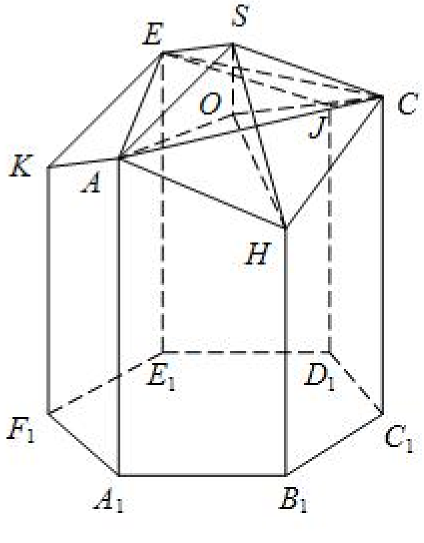
又顶点S的曲率为 $2\pi-3\theta$，

$\therefore\cos(2\pi-3\theta)=\cos3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos2\theta\cos\theta-\sin2\theta\sin\theta$

$=\left(2\cos^2\theta-1\right)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=\left(2\cos^2\theta-1\right)\cos\theta-2\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\times(-\frac{1}{3})^3-3\times(-\frac{1}{3})=\frac{23}{27}$.



21．(1) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

(2) $(-1,-3)$

(3)答案见解析.

【分析】（1）根据双曲线渐近线方程和右焦点列出方程，即可求出答案；

（2）首先求出点 M 的轨迹方程即为 $y_M=\frac{3}{k}x_M$，其中 k 为直线 PQ 的斜率；

若选择①②：设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，求出点 M 的坐标，可得 M 为 AB 的中点，即可推出 $|MA|=|MB|$；

若选择①③：当直线 AB 的斜率存在时，设直线 AB 的方程为 $y=m(x-2)$，求出点 M 的坐标，即可 $PQ\parallel AB$；

若选择②③：设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，设 AB 的中点 C，求出点 C 的坐标，可得点 M 恰为 AB 中点，故点 M 在直线 AB 上.

【详解】（1）由题意可得 $c=2,\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即 $\frac{b}{a}=\sqrt{3},\sqrt{a^2+b^2}=2$，

解得 $a=1,b=\sqrt{3}$ ，

因此 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

（2）由直线 AB 的斜率为 1，得直线 AB 的方程为 $y=x-2$，

联立 $\begin{cases}y=x-2\\y=\sqrt{3}x\end{cases}$ ，得：$\begin{cases}x=-\sqrt{3}-1\\y=-3-\sqrt{3}\end{cases}$ ，不妨设 $A(-\sqrt{3}-1,-3-\sqrt{3})$，

联立 $\begin{cases}y=x-2\\y=-\sqrt{3}x\end{cases}$ ，得：$\begin{cases}x=\sqrt{3}-1\\y=-3+\sqrt{3}\end{cases}$ ，不妨设 $B(\sqrt{3}-1,-3+\sqrt{3})$，

故线段 AB 的中点的横坐标为 -1，纵坐标为 -3，

故线段 AB 的中点的坐标为 $(-1,-3)$；

（3）由题意设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m,(k\neq 0)$，将直线 PQ 的方程代入 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 得 $(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$，

$\Delta=12(m^2+3-k^2)>0$，因为 $x_1>x_2>0$，$\therefore x_1+x_2=\frac{2km}{3-k^2}>0,x_1x_2=-\frac{m^2+3}{3-k^2}>0$，

$\therefore 3-k^2<0$ ，$\therefore x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{m^2+3-k^2}}{k^2-3}$，

设点 M 的坐标为 (x_M,y_M)，则 $\begin{cases}y_M-y_1=-\sqrt{3}(x_M-x_1)\\y_M-y_2=\sqrt{3}(x_M-x_2)\end{cases}$，

整理得 $y_1-y_2=2\sqrt{3}x_M-\sqrt{3}(x_1+x_2)$，

$\because y_1-y_2=k(x_1-x_2)$，$\therefore 2\sqrt{3}x_M=\sqrt{3}(x_1+x_2)+k(x_1-x_2)$ ，

解得 $x_M=\frac{k\sqrt{m^2+3-k^2}-km}{k^2-3}$，

又因为 $2y_M-(y_1+y_2)=\sqrt{3}(x_1-x_2)$，

$\because y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m$，$\therefore 2y_M=\sqrt{3}(x_1-x_2)+k(x_1+x_2)+2m$，

$\therefore y_M=\frac{3\sqrt{m^2+3-k^2}-3m}{k^2-3}$，$\therefore y_M=\frac{3}{k}x_M$；

若选择①②作条件：

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$，并设 A 的坐标为 (x_3,y_3) ，B 的坐标为 (x_4,y_4)，

则$\begin{cases}y_3=k(x_3-2)\\y_3=\sqrt{3}x_3\end{cases}$，解得$x_3=\dfrac{2k}{k-\sqrt{3}},y_3=\dfrac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}$，

同理求得$x_4=\dfrac{2k}{k+\sqrt{3}},y_4=-\dfrac{2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}$，

$\therefore x_3+x_4=\dfrac{4k^2}{k^2-3},y_3+y_4=\dfrac{12k}{k^2-3}$，

此时点M的坐标满足$\begin{cases}y_M=k(x_M-2)\\y_M=\dfrac{3}{k}x_M\end{cases}$，

解得$x_M=\dfrac{2k^2}{k^2-3}=\dfrac{1}{2}(x_3+x_4),y_M=\dfrac{6k}{k^2-3}=\dfrac{1}{2}(y_3+y_4)$，

故M为AB的中点，即$|MA|=|MB|$，即③成立；

若选择①③作条件：

当直线AB的斜率不存在时，点M即为点$F(2,0)$，此时不在直线$y=\dfrac{3}{k}x$矛盾，

当直线AB的斜率存在时，设直线AB的方程为$y=m(x-2),(m\neq 0)$，并设A的坐标为(x_5,y_5)，B的坐标为(x_6,y_6)，

则$\begin{cases}y_5=m(x_5-2)\\y_5=\sqrt{3}x_5\end{cases}$，解得$x_5=\dfrac{2m}{m-\sqrt{3}},y_5=\dfrac{2\sqrt{3}m}{m-\sqrt{3}}$，

同理解得$x_6=\dfrac{2m}{m+\sqrt{3}},y_6=-\dfrac{2\sqrt{3}m}{m+\sqrt{3}}$，

此时$x_M=\dfrac{1}{2}(x_5+x_6)=\dfrac{2m^2}{m^2-3}$，$\therefore y_M=\dfrac{1}{2}(y_5+y_6)=\dfrac{6m}{m^2-3}$，

由于点M同时在直线$y=\dfrac{3}{k}x$上，故$\dfrac{6m}{m^2-3}=\dfrac{3}{k}\cdot\dfrac{2m^2}{m^2-3}$解得$k=m$，

因此$PQ\parallel AB$，即②成立.

若选择②③作条件：

设直线AB的方程为$y=k(x-2)$，并设A的坐标为(x_7,y_8)，B的坐标为(x_8,y_8)，

则$\begin{cases}y_7=k(x_7-2)\\y_7=\sqrt{3}x_7\end{cases}$，解得$x_7=\dfrac{2k}{k-\sqrt{3}},y_7=\dfrac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}$，

同理可得$x_8=\dfrac{2k}{k+\sqrt{3}},y_8=-\dfrac{2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}}$，

设AB的中点为$C(x_C,y_C)$，则$x_C=\dfrac{1}{2}(x_7+x_8)=\dfrac{2k^2}{k^2-3},y_C=\dfrac{1}{2}(y_7+y_8)=\dfrac{6k}{k^2-3}$，

由于$|MA|=|MB|$，故M在AB的垂直平分线上，即点M在直线$y-y_C=-\dfrac{1}{k}(x-x_C)$上，

将该直线与$y=\dfrac{3}{k}x$联立，解得$x_M=\dfrac{2k^2}{k^2-3}=x_C,y_M=\dfrac{6k}{k^2-3}=y_C$，

即点M恰为AB中点，即点M在直线AB上,①成立；

【点睛】本题考查了双曲线方程的求法以及双曲线几何性质的应用，以及直线和双曲线的位置关系，综合性强，计算量大，解答时要明确解题思路，关键是联立方程进行计算十分繁杂，要特别注意准确性.

22．(1)$\left(-\infty,\frac{2}{\pi}\right]$

(2)证明见解析

公众号：高中试卷君

【分析】(1) 化简 $f(x)=\sin 2x-\cos 2x+1$，令 $t=2x$，得到 $t\in[0,\pi]$ 且 $f(t)=\sin t-\cos t+1$，根据题意转化为 $a\le\frac{\sin t-\cos t+1}{t}$ 在 $(0,\pi]$ 上恒成立，设 $g(t)=\frac{\sin t-\cos t+1}{t}$，求得 $g'(t)=\frac{t\cos t+t\sin t-\sin t+\cos t-1}{t^2}$，设 $h(t)=t\cos t+t\sin t-\sin t+\cos t-1$，利用导数求得 $h(t)$ 的单调性，结合 $h(0)=0,h\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$ 且 $h(\pi)<0$，得到 $h(t)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\pi)$ 上存在一个零点，设为 t_0，进而得到 $g(t)$ 的单调性，求得 $g(t)$ 的最小值 $g(\pi)=\frac{2}{\pi}$，即可求解；

(2)由(1)得到不等式 $\sin t-\cos t+1\ge\frac{2}{\pi}t$ 恒成立，即 $\sqrt{2}\sin(t-\frac{\pi}{4})\ge\frac{2}{\pi}t-1$ 恒成立，从而证得 $\sqrt{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\ge\frac{2k}{2n+1}-\frac{1}{2}$，进而证得 $\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left[\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right]\right]\ge\frac{3(n+1)}{2(2n+1)}$，得到 $\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left[\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right]\ge\frac{3\sqrt{2}(n+1)}{4(2n+1)}$，进而证得结论.

【详解】(1) 解：由题意，函数 $f(x)=\sin 2x+2\sin^2 x=\sin 2x-\cos 2x+1$，

令 $t=2x$，因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，可得 $t\in[0,\pi]$，且 $f(t)=\sin t-\cos t+1$，

因为 $f(x)\ge 2ax$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立，即 $\sin t-\cos t+1\ge ta$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立，

当 $t=0$ 时，不等式 $\sin t-\cos t+1\ge ta$，显然成立，

所以等价于 $a\le\frac{\sin t-\cos t+1}{t}$ 在 $(0,\pi]$ 上恒成立，

设 $g(t)=\frac{\sin t-\cos t+1}{t},x\in(0,\pi]$，

则 $g'(t)=\frac{(2\cos t+2\sin t)\cdot t-(\sin t-\cos t+1)}{t^2}=\frac{t\cos t+t\sin t-\sin t+\cos t-1}{t^2}$，

设 $h(t)=t\cos t+t\sin t-\sin t+\cos t-1$，可得 $h'(t)=t(\cos t-\sin t)$，

当 $t\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增；

当 $t\in(\frac{\pi}{4},\pi)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，

又因为 $h(0)=0,h\left(\frac{\pi}{4}\right)>0,h(\pi)<0$，所以 $h(t)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\pi)$ 上存在一个零点，设为 t_0，

所以当 $t\in(0,t_0)$ 时，$h(t)>0$，可得 $g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增；

当 $t\in(t_0,\pi)$ 时，$h(t)<0$，可得 $g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，

所以 $g(t)$ 在 $t=t_0$ 处取得极大值，且为最大值，

由 $g(\pi)=\dfrac{2}{\pi}$，所以 $a\le\dfrac{2}{\pi}$，即实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{2}{\pi}\right]$.

（2）解：由（1）知，当 $t\in[0,\pi]$ 时，不等式 $\sin t-\cos t+1\ge\dfrac{2}{\pi}t$ 恒成立，

即 $\sin t-\cos t\ge\dfrac{2}{\pi}t-1$，即 $\sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\ge\dfrac{2}{\pi}t-1$ 恒成立，

当 $1\le k\le n+1$，且 $k\in N^{+}$ 时，可得 $0\le\dfrac{k\pi}{2n+1}+\dfrac{\pi}{4}\le\pi$，

所以 $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}\right)\ge\dfrac{2}{\pi}\cdot\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}+\dfrac{\pi}{4}\right)-1=\dfrac{2k}{2n+1}-\dfrac{1}{2}$，

所以 $\sqrt{2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left[\dfrac{(n+1)\pi}{2n+1}\right]\right]$

$\ge(\dfrac{2}{2n+1}-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{4}{2n+1}-\dfrac{1}{2})+\cdots+(\dfrac{2(n+1)}{2n+1}-\dfrac{1}{2})=\dfrac{2}{2n+1}\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}-\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{3(n+1)}{2(2n+1)}$，

所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left[\dfrac{(n+1)\pi}{2n+1}\right]\ge\dfrac{3\sqrt{2}(n+1)}{4(2n+1)}$，

又因为 $\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{n+1}{n+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}})>\dfrac{1}{2}$，

所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2n+1}\right)+\sin\left(\dfrac{2\pi}{2n+1}\right)+\cdots+\sin\left[\dfrac{(n+1)\pi}{2n+1}\right]\ge\dfrac{3\sqrt{2}(n+1)}{4(2n+1)}>\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

【点睛】思路点睛：对于利用导数研究不等式的恒成立与有解问题的求解策略：

1、通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

2、利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题.

3、根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别.