2022年“三新”协同教研共同体高三联考
数学试卷参考答案(理科)

一、选择题.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	B	C	D	A	B	A	B	A	B

二、填空题.

13. $2\sqrt{2}$　14. $2\sqrt{2}+2$　15. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$　16. $\omega=2$；$\frac{11\pi}{8}$

详解

1.【析】易知$(\complement_U A)\cup B=\{0,1,2\}\cup\{1,2\}=\{0,1,2\}$，故选C.

2.【析】由$l_1/\!/l_2$，可知$3m^2\times\frac{1}{2m-1}=-1$，得$m=\frac{1}{3}$或$-1$，代入检验均满足$l_1/\!/l_2$，故选D.

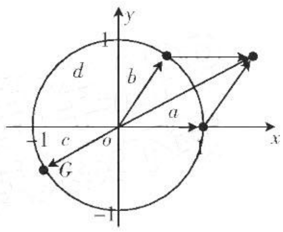
3.【析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，显然$q=1$不符合题意. 由$a_1=2$，$S_5=a_5$，得$q=-1$，所以$S_7=2$，故选B.

4.【析】$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{-5}{5}=-1$，故选B.

5.【析】易得球O的半径为1，且切点所在平面与所有切线所围成的几何体为圆锥，其底面半径为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，母线长为$\sqrt{3}$，所以侧面积$S=\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3\pi}{2}$，故选C.

6.【析】显然$\forall a>0$，$f(-x)=f(x)$，且$f(x)=\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2a}\geqslant\frac{2\sqrt{e^{\frac{x}{a}}\times e^{-\frac{x}{a}}}}{2a}=\frac{1}{a}$，故A，B错误. 令$t=\frac{x}{a}$，则$f(x)=\frac{1}{a}g(t)$. 其中$g(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$的图象可以看成通过任意一点作$t$轴的垂线，与函数$y=e^t$和$y=e^{-t}$的图象各交于一点，取两点的中点并用光滑的曲线连接得到，则由$g(t)$的图象和复合函数的单调性可知D正确.

7.【析】$\because f(x)=2^{\sin x}$关于$(0,1)$对称，$\therefore$排除C；又$f(x)=2^{\sin x}$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增，$\therefore$排除B；又$f(x)=2^{\sin x}$过点$(0,1)$，$\therefore$排除D. 故选A.



8.【析】如图所示，当$\boldsymbol{c}$与$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$反向时，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$有最小值$-\sqrt{3}$，故选B.

9.【析】易知$a\geqslant2$，$b\geqslant2$，$c<2$，$\because\log_3 2<\log_4 3$，且$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(0,1)$上单调递减，$\therefore a>b>c$，故选A.

10.【析】依条件可知$\{[a_n]\}$为等差数列，则$[a_n]=[a_1]+2(n-1)=2n-2$，所以$2n-2\leqslant a_n<2n-1$，所以$n^2-n\leqslant S_n<n^2$，又$45\times44\leqslant S_n=2022<45\times45$，所以$n=45$，故选B.

11.【析】由题意可知，$a+2\geqslant0$，即$a\geqslant-2$，且$g(1)=a+2$，$\therefore\forall x\in[1,2]$，$|ax^2+x+1|\leqslant a+2$，即$-a-2\leqslant ax^2+x+1\leqslant a+2$，$\therefore\forall x\in[1,2]$，$-\frac{x+3}{x^2+1}\leqslant a\leqslant-\frac{1}{x+1}$(当$x=1$时也成立)，

令$h(x)=-\frac{x+3}{x^2+1}$，$x\in[1,2]$，$t(x)=-\frac{1}{x+1}$，$x\in[1,2]$，则$h_{\max}\leqslant a\leqslant t_{\min}$，

$\because h(x)=-\frac{x+3}{(x+3)^2-6(x+3)+10}=-\frac{1}{(x+3)+\frac{10}{x+3}-6}$，且$x+3\in[4,5]$，

$\therefore$由$\frac{1}{2}\leqslant(x+3)+\frac{10}{x+3}-6\leqslant1$，可得$-2\leqslant h(x)\leqslant-1$，即$h_{\max}=-1$，

又$t(x)=-\frac{1}{x+1}$在$[1,2]$上单调递增，

$\therefore t_{\min}=-\frac{1}{2}$，$\therefore-1\leqslant a\leqslant-\frac{1}{2}$.

解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi],k\in\mathbf{Z}$. ………………………………………………………… 10 分

18.【析】(1) $\because\frac{\cos A}{ac}+\frac{\cos B}{bc}=\frac{2\cos C}{ab}$,得 $b\cos A+a\cos B=2c\cos C$,
得 $\sin B\cos A+\sin A\cos B=2\sin C\cos C$,
得 $\sin(B+A)=2\sin C\cos C$,
得 $\sin C=2\sin C\cos C$,

$\therefore\cos C=\frac{1}{2}$,得 $C=60^\circ$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)(方法一)令 $AD=x,CD=y$,由角平分线的性质可知 $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$①, ………………………………………… 7 分

在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理可得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos 30^\circ$,
即 $x^2=b^2+3-3b$②,
同理在 $\triangle BCD$ 中可得 $y^2=a^2+3-3a$③,
$\therefore$ 由①②③可得 $a=b$ 或 $ab=a+b$. …………………………………………………………………… 9 分
当 $a=b$ 时,$x=y$,
又 $x+y=2$,$\therefore x=y=1,a=b=2$. ……………………………………………………………… 10 分

当 $ab=a+b$ 时,由①可得 $y=\frac{ax}{b}$,

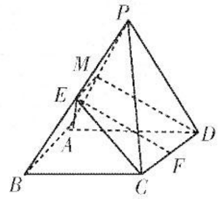
由 $x+y=x+\frac{ax}{b}=2$,得 $x=\frac{2b}{a+b}=\frac{2b-2}{b}$,

代入②得 $b^4+3b^2(1-b)-4(1-b)^2=0$,解得 $b=2$ 或 $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$(舍去). ……………………………… 12 分

(方法二)$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$,$\therefore\frac{1}{2}ab\sin 60^\circ=\frac{1}{2}b\cdot CD\sin 30^\circ+\frac{1}{2}a\cdot CD\sin 30^\circ$,

$\therefore ab=a+b$①. ………………………………………………………………………………………………… 8 分
又由余弦定理可得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos 60^\circ$,即 $4=a^2+b^2-ab$②. ………………………… 10 分
$\therefore$ 由①②可得 $a=b=2$. …………………………………………………………………………… 12 分

19.【析】(1)设平面 CEF 交 AP 于点 M,连接 EM,$\because ABCD$ 是正方形,



$\therefore AB/\!/CD$,$\therefore CD/\!/$ 平面 PAB,$\therefore EM/\!/CD/\!/AB$,$\therefore M$ 为 AP 的中点.
$\because E,M$ 分别为 PB,PA 的中点,设四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 v,

则四棱锥 $E-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{2}v$,$\therefore V_{D\ EMA}=V_{D\ EMP}$,

又 $EM/\!/CD$ 且 $EM=\frac{1}{2}CD$,$\therefore V_{P\ ECD}=2V_{P\ EMD}$,

$\therefore V_{D\ EMA}+V_{D\ EMP}+V_{P\ ECD}=4V_{D\ EMA}=\frac{1}{2}v,V_{D\ EMA}=\frac{1}{8}v$,

$\therefore$ 下部分几何体 $EBC-MAD$ 的体积为 $\frac{1}{2}v+\frac{1}{8}v=\frac{5}{8}v$,上部分几何体 $P-ECDM$ 的体积为 $\frac{3}{8}v$,

$\therefore$ 上部分几何体与下部分几何体的体积比为 $\frac{3}{5}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知,四边形 $EFDM$ 为平行四边形,

$\because AB\perp EF,EF/\!/MD$,$\therefore AB\perp MD$,由 $\begin{cases}AB\perp MD\\AB\perp AD\end{cases}$,得 $AB\perp$ 平面 APD. ……………………………… 6 分

$\therefore AB\perp PA,CD\perp PD$,由 $PB=PC=2\sqrt{2}$,得 $PA=PD=2$,

以 AD 的中点 O 为坐标原点建立空间直角坐标系(图略),由题意得 $P(0,0,\sqrt{3})$,$D(0,1,0)$,$E(1,-\frac{1}{2},$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$)，$C(2,1,0)$，$F(1,1,0)$，则$\overrightarrow{FC}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{EF}=(0,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，………………………………………… 8分

设平面 EFC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{3}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ x=0,\end{cases}$故可取 $\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{3})$，………………………………………… 10分

$\because\overrightarrow{PD}=(0,1,-\sqrt{3})$，

$\therefore PD$ 与平面 EFC 所成角的正弦值 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PD}\rangle|=|\frac{1-3}{2\times2}|=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 12分

20.【析】(1)证明：$\because a_{2k+2}+2=a_{2k+1}+4=2a_{2k}+4=2(a_{2k}+2)$，

$\therefore\{a_{2k}+2\}(k\in\mathbf{N}_+)$为等比数列，………………………………………… 2分

且公比为2，首项为 $a_2+2=a_1+4=5$，$\therefore a_{2k}+2=5\times2^{k-1}$，即 $a_{2k}=5\times2^{k-1}-2$，$k\in\mathbf{N}_+$. ……………… 4分

(2)同理可得 $a_{2k-1}=5\times2^{k-1}-4$，$k\in\mathbf{N}_+$. ………………………………………… 5分

$\because\frac{5\times2^k}{a_{2k-1}a_{2k}}=\frac{5\times2^k}{(5\times2^{k-1}-4)(5\times2^{k-1}-2)}=\frac{5\times2^{k-1}}{(5\times2^{k-2}-2)(5\times2^{k-1}-2)}=2[\frac{1}{(5\times2^{k-2}-2)}-\frac{1}{(5\times2^{k-1}-2)}]$，

………………………………………………………………………… 7分

$\therefore S_n=2[\frac{1}{(5\times2^{-1}-2)}-\frac{1}{(5\times2^0-2)}]+2[\frac{1}{(5\times2^0-2)}-\frac{1}{(5\times2^1-2)}]+\cdots+2[\frac{1}{(5\times2^{k-3}-2)}-\frac{1}{(5\times2^{k-2}-2)}]+2[\frac{1}{(5\times2^{k-2}-2)}-\frac{1}{(5\times2^{k-1}-2)}]$

$=2[\frac{1}{(5\times2^{-1}-2)}-\frac{1}{(5\times2^{k-1}-2)}]=4-\frac{2}{5\times2^{k-1}-2}$，………………………………………… 10分

当 $k\in\mathbf{N}_+$ 时，$y=4-\frac{2}{5\times2^{k-1}-2}$单调递增，

$\therefore\frac{10}{3}\leqslant4-\frac{2}{5\times2^{k-1}-2}<4$，即$\frac{10}{3}\leqslant S_k<4$. ………………………………………… 12分

21.【析】(1)$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=1-a^2e^{ax}$，

若 $a=0$，$f(x)=x$，$\therefore$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ………………………………………… 2分

若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2}$，

当 $x\in(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2})$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2},+\infty)$时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2})$上单调递增，在$(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2},+\infty)$上单调递减. ……………………… 4分

若 $a<0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2}$，

当 $x\in(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2})$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2},+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2})$上单调递减，在$(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a^2},+\infty)$上单调递增. ……………………… 6分

(2)证明：当 $a=1$ 时，$f(x)+\ln(x+1)-x+1\leqslant0$，即证明 $\ln(x+1)-e^x+1\leqslant0$，设 $g(x)=\ln(x+1)-e^x+1\leqslant0(x>-1)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-e^x$，

$\because y=\frac{1}{x+1}$与 $y=-e^x$ 在$(-1,+\infty)$上均单调递减，$\therefore g'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减. ……………… 8分

又 $g'(0)=0$，$\therefore$当 $x\in(-1,0)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$在$(-1,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减. ………………………………………… 10分

$\therefore g(x)_{\max}=g(0)=0$，即 $g(x)=\ln(x+1)-e^x+1\leqslant0$，

$\therefore f(x)+\ln(x+1)-x+1\leqslant 0$ 在 $x\in(-1,\infty)$ 上恒成立. ………………………………… 12 分

22.【析】(1)依条件可知，$\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，$\frac{a\sin x}{e^x}\leqslant 1$.

设 $h(x)=\frac{a\sin x}{e^x}$，$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则 $h_{\max}\leqslant 1$. ………………………………… 1 分

$h'(x)=\frac{a(\cos x-\sin x)}{e^x}$. ………………………………… 2 分

①若 $a>0$，∵当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)<0$，

∴当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ 时，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$h(x)$ 单调递减，

$\therefore h_{\max}=h(\frac{\pi}{4})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{e^{\frac{\pi}{4}}}\leqslant 1$，$\therefore 0<a\leqslant\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$. ………………………………… 3 分

②若 $a=0$，$h(x)=0\leqslant 1$ 成立. ………………………………… 4 分

③若 $a<0$，∵当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)>0$.

∴当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ 时，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)<\max\{h(-\frac{\pi}{2}),h(\frac{\pi}{2})\}=h(-\frac{\pi}{2})=\frac{-a}{e^{-\frac{\pi}{2}}}\leqslant 1$，$\therefore 0>a\geqslant -e^{-\frac{\pi}{2}}$. ………………………………… 5 分

综上所述，$-e^{-\frac{\pi}{2}}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$. ………………………………… 6 分

(2)证明：∵当 $a=1$ 时，在 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内，$e^x>\sin x$，

$\therefore y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象无公共点. ………………………………… 7 分

∴设直线与 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的图象分别相切于点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，其中 $x_1\in\mathbf{R}$，$x_2\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，则

$f'(x_1)=g'(x_2)=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，即 $e^{x_1}=\cos x_2=\frac{e^{x_1}-\sin x_2}{x_1-x_2}$. ………………………………… 8 分

可得 $x_1=1-\tan x_2+x_2=\ln\cos x_2$. 依条件可知原命题等价于函数 $t(x)=1-\tan x+x-\ln\cos x$ 在 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上有且仅有一个零点. ………………………………… 9 分

$\because t'(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}+1+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x}$.

∴当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$t'(x)<0$；当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$t'(x)>0$；当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$t'(x)<0$.

∴当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$t(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$ 时，$t(x)$ 单调递增；当 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$t(x)$ 单调递减.

………………………………… 10 分

又 $t(0)=1>0$，$\therefore t(x)$ 在 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$ 内无零点. ………………………………… 11 分

∵当 $\cos\alpha=\frac{1}{e^3}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 时，$\tan\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\sqrt{e^6-1}>e^3-1\approx 19$.

$\therefore t(\alpha)<1-19+\alpha+6<0$，∴有且仅有一个 $x\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，使得 $t(x)=0$，∴有且仅有一条直线同时与 $f(x)$，$g(x)$ 的图象相切. ………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。