高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　由题意得 $A=[-1,3]$，$B=(a,+\infty)$，因为 $A\cap B=\varnothing$，所以 $a\geqslant 3$. 故选 D.

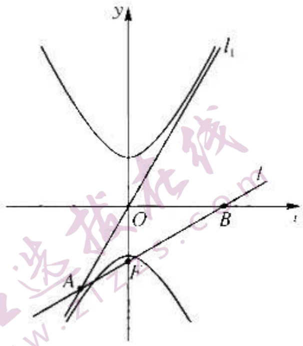
2. B　由 $(8+6i)z=5+12i$，得 $z=\dfrac{5+12i}{8+6i}$，所以 $|z|=\dfrac{|5+12i|}{|8+6i|}=\dfrac{\sqrt{5^2+12^2}}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{13}{10}$. 故选 B.

3. A　l_2 的方程可化为 $x+\dfrac{m}{2}y+\sqrt{5}-1=0$，因为 $l_1/\!/l_2$，易知 $m=-4$，所以 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\dfrac{|(\sqrt{5}-1)-(-1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$ $=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$. 故选 A.

4. B　由题意知 $\tan\theta_1=2$，$\tan\theta_2=3$，所以 $\tan(\theta_1-\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{2-3}{1+2\times 3}=-\dfrac{1}{7}$. 故选 B.

5. B　若 $m=0$，点 P 的轨迹为线段 F_1F_2 的垂直平分线，不是双曲线；反之，若 P 的轨迹是双曲线，则一定满足“$||PF_1|-|PF_2||$ 的值为定值 m，且 $m<|F_1F_2|$”. 于是“$||PF_1|-|PF_2||$ 的值为定值 m，且 $m<|F_1F_2|$”是“点 P 的轨迹是双曲线”的必要不充分条件. 故选 B.

6. C　由题意得 $f'(x)=2\cos 2x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3$，所以 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}=2$，故所求切线方程为 $y-3=2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，即 $4x-2y+6-\pi=0$. 故选 C.



7. C　由题意知，l 的倾斜角为 $30°$，因为 $|OA|=|OB|$，所以 l_1 的倾斜角为 $60°$，斜率为 $\sqrt{3}$，即 $\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

8. A　由图象知 $\dfrac{11\pi}{12}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，由 $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=0$，得 $2\times\dfrac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，结合 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$；由 $f(0)=1$ 得 $A\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，故 $A=2$，故 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$. 故选 A.

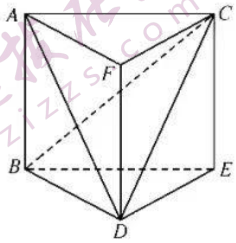
9. D　法一：由题意知，$a=2$，$b=1$，故半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，故 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，线段 AB 的方程为 $x-2y+2=0\ (0\leqslant y\leqslant 1)$. 设点 $P(2m-2,m)(0\leqslant m\leqslant 1)$，则 $\overrightarrow{PF_1}=(-\sqrt{3}+2-2m,-m)$，$\overrightarrow{PF_2}=(\sqrt{3}+2-2m,-m)$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=5m^2-8m-1=5\left(m-\dfrac{4}{5}\right)^2-\dfrac{11}{5}$，所以当 $m=\dfrac{4}{5}$ 时，$(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\min}=-\dfrac{11}{5}$；当 $m=0$ 时，$(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\max}=1$. 故 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为 $\left[-\dfrac{11}{5},1\right]$. 故选 D.

法二：由题意知 $a=2$，$b=1$，故半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，作 $OP_0\perp AB$ 于点 P_0，则 P_0 在线段 AB 上，直线 AB 的方程为 $x-2y+2=0$，由点到直线的距离公式，得 $|OP_0|=\dfrac{|0-2\times 0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. 而 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OF_2}^2=\overrightarrow{PO}^2-3$，因此 $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\min}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-3=-\dfrac{11}{5}$. 又因为 $|OP|\leqslant|OA|=2$，所以 $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\max}=2^2-3=1$. 因此 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为 $\left[-\dfrac{11}{5},1\right]$. 故选 D.

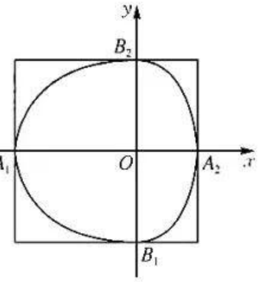
10. A　因为对任意正数 x,y，当 $x<y$ 时，$yf(x)>xf(y)$，即 $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{f(y)}{y}$ 恒成立；又 $\forall x>0$，$f(x)<0$，所以 $0<$

$-\frac{f(x)}{x}<-\frac{f(y)}{y}$，$0<x^2<y^2$，所以 $-xf(x)<-yf(y)$，即 $xf(x)>yf(y)$. 令 $g(x)=xf(x)$，则对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$，当 $x<y$ 时，恒有 $g(x)>g(y)$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；由 $\sin 0.1<0.1<\tan 0.1$，得 $g(\sin 0.1)>g(0.1)>g(\tan 0.1)$，即 $a>b>c$. 故选 A.

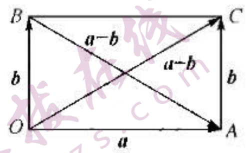
11\. C　将四面体 $ABCD$ 补成如图所示的三棱柱 $ACF-BED$，因为 $AB\perp AC$，异面直线 AC 与 BD 所成的角为 30°，$BE\,/\!/\,AC$，所以 $\angle EBD=30^\circ$，$AB\perp BE$，又 $AB\perp BD$，$BE\cap BD=B$，BE，$BD\subset$ 平面 BDE，所以 $AB\perp$ 平面 BDE. $\triangle BDE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}BD\cdot BE\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{1}{2}=\frac{15}{4}$，$V_{三棱锥D-ACF}=V_{三棱锥C-BED}=\frac{1}{3}S\cdot AB$，所以 $V_{四面体ABCD}=V_{三棱柱ACF-BED}-V_{三棱锥D-ACF}-V_{三棱锥C-BED}=S\cdot AB-\frac{2}{3}S\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{15}{4}\times4=5$. 故选 C.



12\. D　过曲线 E 与坐标轴的交点作相应坐标轴的垂线（如图所示），以四条线的交点为顶点的四边形为边长是 6 的正方形，曲线 E 在该正方形内，故 E 及其内部区域的面积小于正方形的面积 36，故 A 正确；曲线 E 的对称轴仅有 x 轴，且 E 与 x 轴仅有两个公共点，故 B 正确；若 $k=0$，此时可设 l 的方程为 $y=t$，易求 A，B 的坐标分别为 $\left(-\frac{4}{3}\sqrt{9-t^2},t\right)$，$\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-t^2},t\right)$，故 AB 中点坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{9-t^2}}{3},t\right)$，设 $P(x,y)$，故 $x=-\frac{\sqrt{9-t^2}}{3}$，$y=t$，消去 t 得 $x^2+\frac{y^2}{9}=1(x<0)$，即 P 的轨迹在椭圆 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 上. 若 $k\neq0$，设 l 的方程为 $y=kx+n$，若 A，B 均在 C_1 上，利用点差法，易求 $k_{OP}=-\frac{9}{16k}$，同理若 A，B 均在 C_2 上，易求 $k_{OP}=-\frac{9}{4k}$，显然 $-\frac{9}{16k}\neq-\frac{9}{4k}$，故此时点 P 不可能总落在某条直线上，故 C 正确，D 错误. 故选 D.



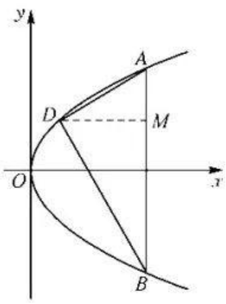
13\. $\frac{\pi}{3}$　法一：由题意，得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=4$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{2\times2}=\frac{1}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.



法二：由题意，得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=4$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$. 如图所示，易求得 $\angle OBA=\frac{\pi}{3}$，易得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

14\. $x-2=0$ 或 $4x+3y-11=0$　若 l 的斜率不存在，则 l 的方程为 $x=2$，是圆 C 的切线；若 l 的斜率存在，设 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$，即 $kx-y+1-2k=0$，则 $\frac{|1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=-\frac{4}{3}$，此时 l 的方程为 $4x+3y-11=0$，故直线 l 的方程为 $x-2=0$，或 $4x+3y-11=0$.

15\. 2　设直线 AD 为 $x=my+n(m\neq0)$，$A(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则 $B(x_1,-y_1)$，由 $\begin{cases}y^2=2px,\\x=my+n\end{cases}$，得 $y^2-2pmy-2pn=0$，所以 $y_1+y_2=2pm$. 因为 $AD\perp BD$，故 $k_{AD}\cdot k_{BD}=-1$，即 $\frac{1}{m}\cdot\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}=-1$，所以 $\frac{1}{m}\cdot\frac{2pm}{x_2-x_1}=-1$，所以 $\frac{x_2-x_1}{p}=-2$. 作 $DM\perp AB$ 垂足为 M，则点 D 到直线 $x=t$ 的距离为 $|DM|=|x_1-x_2|$，所以 $\frac{|DM|}{p}=2$.



16. $\left[\frac{2}{\ln 2},+\infty\right)$　$f'(x)=ax-e^x$，则 x_1,x_2 是 $f'(x)=0$，即 $ax=e^x$ 的两个根，则 $ax_1=e^{x_1}$，所以 $\ln ax_1=x_1$，同理 $\ln ax_2=x_2$，设 $\frac{x_2}{x_1}=t(t\geqslant 2)$，则 $x_2=tx_1$，代入 $\ln ax_2=x_2$，得 $\ln ax_1+\ln t=tx_1$，所以 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}$，令 $u=\frac{\ln t}{t-1}$，则 $u'=\frac{t-1-t\ln t}{t(t-1)^2}$，令 $m(t)=t-1-t\ln t$，则 $m'(t)=-\ln t<0$，所以 $m(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，所以 $m(t)\leqslant m(2)=1-2\ln 2<0$，所以 $u=\frac{\ln t}{t-1}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，所以 $0<u\leqslant \ln 2$；因为 $ax_1=e^{x_1}$，所以 $a\cdot u=e^u$，所以 $a=\frac{e^u}{u}$，易知 $y=\frac{e^u}{u}$ 在 $(0,\ln 2]$ 上单调递减，所以 $a\geqslant\frac{2}{\ln 2}$，故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{\ln 2},+\infty\right)$.

17. 解：(1)由 $a\sin A-c\sin C=(b-c)\sin B$ 及正弦定理，得 $a^2-c^2=b^2-bc$，

所以 $b^2+c^2-a^2=bc$，………………………………………… 2分

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 3分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 4分

(2)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

得 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$，………………………… 7分

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以

$\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，………………………………………… 8分

所以 $\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}<2$，即 $\frac{b}{c}$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$. ……………………… 10分

18. 解：(1)法一：当 $a=0$ 时，显然 $l_1\perp l_2$，且 l_1 与 l_2 的交点为 $(-2,0)$；……………………………… 1分

当 $a\neq 0$ 时，l_1 与 l_2 的斜率分别为 $k_{l_1}=\frac{1}{a}$，$k_{l_2}=-a$，………………………………………… 2分

$k_{l_1}\cdot k_{l_2}=-1$，所以 $l_1\perp l_2$，故对任意实数 a，$l_1\perp l_2$. ………………………………………… 3分

直线 l_1 过定点 $A(-2,0)$，l_2 过定点 $B(2,0)$，………………………………………… 4分

设 $P(x,y)$，则 $PA\perp PB$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，

所以 $(x+2)(x-2)+y^2=0$，即 $x^2+y^2=4$.

又点 $(2,0)$ 不是 l_1 与 l_2 的交点，

故曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=4(x\neq 2)$. ………………………………………… 6分

法二：(消参法)当 $y\neq 0$ 时，由 $x-ay+2=0$，得 $a=\frac{x+2}{y}$，代入 $ax+y-2a=0$，得 $\frac{x(x+2)}{y}+y-\frac{2(x+2)}{y}=0$，

化简整理，得 $x^2+y^2=4(y\neq 0)$，当 $y=0$ 时，$x=2$ 或 $x=-2$，易验证点 $(-2,0)$ 符合条件，$(2,0)$ 不符合条件，故曲线 C 的方程为 $x^2+y^2=4(x\neq 2)$. ………………………………………… 6分

(2)圆 E 与曲线 C 的方程两边作差，得 $mx+ny-2=0(x\neq 2)$，即为直线 MN 的方程. ……………………… 7分

因为 $|MN|=2\sqrt{3}$，所以点 O 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{m^2+n^2}}=1$，

即 $m^2+n^2=4$.　① ………………………………………… 9分

因为圆 E 的圆心 (m,n) 在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上，所以 $n=\sqrt{3}m$.　② ……………………… 10分

①②联立,并解得$\begin{cases}m=1,\\n=\sqrt{3},\end{cases}$或$\begin{cases}m=-1,\\n=-\sqrt{3},\end{cases}$

当$\begin{cases}m=1,\\n=\sqrt{3}\end{cases}$时,直线 MN 的方程为 $x+\sqrt{3}y-2=0$,过$(2,0)$点,不合题意;

当$\begin{cases}m=-1,\\n=-\sqrt{3}\end{cases}$时,直线 MN 的方程为 $x-\sqrt{3}y+2=0$,易验证符合题意.

故 m,n 的值为$-1,-\sqrt{3}$. ………………………………………………… 12分

19.(1)解:当 $n=2$ 时,$a_1=\frac{a_2-1}{2}$,所以 $a_2=3$;………………………………………… 1分

当 $n\geqslant3$ 时,$a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-2}}{2n-5}=\frac{a_{n-1}-1}{2}$,

与 $a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2n-3}=\frac{a_n-1}{2}$两边分别作差,得$\frac{a_{n-1}}{2n-3}=\frac{a_n-1}{2}-\frac{a_{n-1}-1}{2}$,

化简,得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n-1}{2n-3}(n\geqslant3)$, ………………………………………… 3分

所以当 $n\geqslant3$ 时,$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_3}{a_2}\times a_2=\frac{2n-1}{2n-3}\times\frac{2n-3}{2n-5}\times\cdots\times\frac{5}{3}\times3=2n-1$, ………… 5分

显然 $n=1,2$ 时上式仍成立,故对任意正整数 n,$a_n=2n-1$. ………………………… 6分

(2)证明:由(1)知 $a_2=3$,所以 $b_1=1,b_2=2$. ………………………………………… 7分

因为 $\ln b_n+\ln b_{n+2}=2\ln b_{n+1}$,所以 $b_nb_{n+2}=b_{n+1}^2$,

所以$\{b_n\}$为等比数列,且公比 $q=\frac{b_2}{b_1}=2$,所以 $b_n=2^{n-1}$, ………………………… 8分

所以 $T_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$, ……………………………………………………… 9分

所以 $T_n\cdot T_{n+2}=(2^n-1)(2^{n+2}-1)=2^{2n+2}-(2^n+2^{n+2})+1=2^{2n+2}-5\cdot2^n+1$.

又 $T_{n+1}^2=(2^{n+1}-1)^2=2^{2n+2}-4\times2^n+1$,所以 $T_n\cdot T_{n+2}<T_{n+1}^2$. ………………… 12分

20.(1)证明:分别取 PC,PD 的中点 G,F,连接 BG,FG,EF,

因为 F,G 分别为 PD,PC 的中点,所以 $FG/\!/CD$,且 $FG=\frac{1}{2}CD$. ……………………… 1分

又 E 为 AB 的中点,所以 $BE/\!/CD$,且 $BE=\frac{1}{2}CD$,

所以 $FG/\!/BE$,且 $FG=BE$,所以四边形 $BEFG$ 为平行四边形,

所以 $EF/\!/BG$. …………………………………………………………………… 2分

因为 $CD=PC=2,PD=2\sqrt{2}$,所以 $PD^2=PC^2+CD^2$,所以 $CD\perp PC$, ……………… 3分

又 $CD\perp BC$,$BC,PC\subset$平面 PBC,$BC\cap PC=C$,

所以 $CD\perp$平面 PBC. ………………………………………………………… 4分

又 $BG\subset$平面 PBC,所以 $CD\perp BG$.

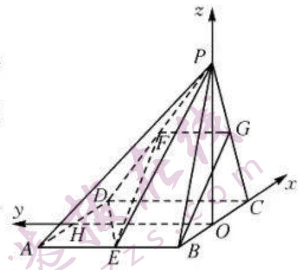
因为 $BC=PB$,G 为 PC 的中点,所以 $BG\perp PC$, ………………………………… 5分

因为 $EF/\!/BG$,所以 $EF\perp CD$,$EF\perp PC$,$CD,PC\subset$平面 PCD,$CD\cap PC=C$,

所以 $EF\perp$平面 PCD,又 $EF\subset$平面 PDE,所以平面 $PDE\perp$平面 PCD. ………… 6分

(2)解:由(1)知 $CD\perp$平面 PBC,又 $CD\subset$平面 $ABCD$,所以平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$,

分别取 BC,AD 的中点为 O,H,连接 PO,OH,则 $PO\perp BC$,$HO\perp BC$.



因为平面 $PBC\cap$ 平面 $ABCD=BC$，$PO\subset$ 平面 PBC，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，又 $OH\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp OH$. ······················ 7 分

以直线 OC,OH,OP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则

$D(1,2,0)$，$A(-1,2,0)$，$E(-1,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{PD}=(1,2,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{ED}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$. ························ 8 分

设平面 PDE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y=0,\\ x+2y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-2$，$z=-\sqrt{3}$，故 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-\sqrt{3})$；······························· 9 分

设平面 PAD 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a=0,\\ a+2b-\sqrt{3}c=0.\end{cases}$

令 $c=2$，则 $a=0$，$b=\sqrt{3}$，故 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},2)$，······························· 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times\sqrt{8}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{14}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

设二面角 $E-PD-A$ 的大小为 θ，则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\dfrac{6}{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ······························· 12 分

21. (1)解：由题意知 $A(-a,0)$，$B(0,b)$，

所以直线 AB 的方程为 $\dfrac{x}{-a}+\dfrac{y}{b}=1$，即 $bx-ay+ab=0$. ······························· 1 分

因为 $F_1(-1,0)$ 到 AB 的距离为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}|OB|$，即 $\dfrac{|-b+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}b$. ······························· 2 分

所以 $7(a-1)^2=a^2+b^2$，又 $a^2-b^2=1$，解得 $a=\dfrac{4}{5}$（舍去），或 $a=2$.

所以 $a^2=4$，$b^2=3$. ······························· 3 分

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ······························· 4 分

(2)证明：椭圆 C 的 3 倍相似椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=3$，即 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

设 $N(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，······························· 5 分

联立 l 与 C 的方程，得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

则 $\Delta_1=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$，即 $4k^2+3>m^2$，

且 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$，······························· 6 分

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(\dfrac{8km}{3+4k^2}\right)^2-\dfrac{4(4m^2-12)}{3+4k^2}}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$. ··················· 7 分

联立 l 与 E 的方程，得 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-36=0$，

则 $x_3+x_4=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$，$x_3x_4=\dfrac{4m^2-36}{3+4k^2}$，

所以 $|x_3-x_4|=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{12k^2+9-m^2}}{3+4k^2}$，······························· 8 分

所以 $x_1+x_2=x_3+x_4$，所以线段 NP,MQ 的中点相同，

所以 $|MN|=|PQ|$. ………………………………………………………………………… 9 分

因为 $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{NQ}$，即 $\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{NQ}-\overrightarrow{PQ}$，

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NP}$，所以 $|MN|=|NP|$，所以 $|MQ|=3|NP|$， ………………………………… 10 分

所以 $|x_3-x_4|=3|x_1-x_2|$，即 $\frac{4\sqrt{3}\sqrt{12k^2+9-m^2}}{3+4k^2}=3\times\frac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$，

化简，得 $4m^2-12k^2=9$，满足 $4k^2+3>m^2$，

所以 $\frac{4m^2}{9}-\frac{4k^2}{3}=1$，故点 $T(k,m)$ 在双曲线 $\frac{4y^2}{9}-\frac{4x^2}{3}=1$ 上. ………………………… 12 分

22. 解：(1)由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=2x+1+\frac{a}{x}=\frac{2x^2+x+a}{x}(x>0)$，……………… 1 分

当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增； ……………………… 2 分

当 $a<0$ 时，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{\sqrt{1-8a}-1}{4}$，由 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{\sqrt{1-8a}-1}{4}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{1-8a}-1}{4}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{1-8a}-1}{4},+\infty\right)$ 上单调递增. ………………… 4 分

(2)若 $a=1$，则 $g(x)=x+1-(x^2+x+\ln x)=-x^2-\ln x+1$，

由 $|x_1g(x_2)-x_2g(x_1)|>\lambda|x_1-x_2|$，$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，得 $\left|\frac{g(x_2)}{x_2}-\frac{g(x_1)}{x_1}\right|>\lambda\left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right|$，①…………… 6 分

设 $\varphi(x)=\frac{g(x)}{x}=-x-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=-1-\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2+2-\ln x}{x^2}$， ……………………… 7 分

令 $m(x)=x^2+2-\ln x$，则 $m'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}(x>0)$，

当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$m'(x)<0$，当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$m'(x)>0$，

所以 $m(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $m(x)_{\min}=m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 2>0$， ……………………………………………………… 9 分

所以 $\varphi'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

不妨设 $x_1>x_2>0$，则 $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}<0$，$\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$，即 $\frac{g(x_1)}{x_1}<\frac{g(x_2)}{x_2}$，

所以①式可化为 $\frac{g(x_2)}{x_2}-\frac{g(x_1)}{x_1}>\lambda\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)$，即 $\frac{g(x_2)}{x_2}-\frac{\lambda}{x_2}>\frac{g(x_1)}{x_1}-\frac{\lambda}{x_1}$ 对任意 $x_1>x_2>0$ 恒成立. ……… 10 分

设 $h(x)=\frac{g(x)}{x}-\frac{\lambda}{x}=-x-\frac{\ln x}{x}+\frac{1-\lambda}{x}$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h'(x)=-1-\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{1-\lambda}{x^2}\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $\lambda\leqslant x^2+2-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $\lambda\leqslant m(x)_{\min}$，即 $\lambda\leqslant\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$. 故实数 λ 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\right]$. ……………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。