

2024 年普通高等学校招生全国统一考试模拟 (一)

数学答案与解析

本答案共 16 页, 22 题。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

题目	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	A	B	B	C	C	D

1. 实向量 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (-1, n)$, $p \Leftrightarrow q$ 表示 p 的充分必要条件为 q , 则以下说法错误的是

A. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow mn = 1$

B. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为锐角 $\Leftrightarrow mn > 1$

C. $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow m + n = 0$

D. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{m+n}{mn-1}\right)^2 = 3$

答案: D

解析: A. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow -1 + mn = 0 \Leftrightarrow mn = 1$

B. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 为锐角 $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) > 0$ 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线 $\Leftrightarrow -1 + mn > 0 \wedge n + m \neq 0 \Leftrightarrow mn > 1$

最后一个等价是由于 $m + n = 0$ 时, 必有 $mn \leq 0 < 1$, 这显然成立。

C. 在 B 中已蕴含。

D. 当 $m = \sqrt{3}, n = 0$ 时, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 其仍满足 $\left(\frac{m+n}{mn-1}\right)^2 = 3$ 。

2. 已知角 $\varphi, \psi \in [0, \pi]$, 满足 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin \psi = \frac{35}{37}$, 则 $\tan(2\varphi + \psi)$ 的可能取值为

A. $\frac{57}{176}$

B. $\frac{176}{63}$

C. $\frac{104}{153}$

D. $\frac{57}{153}$

答案: A

解析: 由条件, 则 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 = -\frac{3}{5}$, $\sin 2\varphi = \sqrt{1 - \cos^2 2\varphi} = \frac{4}{5}$, 由

条件, $|\cos \psi| = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \frac{12}{37}$, 则 $\cos \psi$ 有两种可能取值。而由条件易知 $2\varphi + \psi \in (\pi, 2\pi)$, 则

下面讨论:

情形 1. $\cos \psi = \frac{12}{37}$, 此时

$$\cos(2\varphi + \psi) = \cos 2\varphi \cos \psi - \sin 2\varphi \sin \psi = -\frac{104}{185}$$

则 $\tan(2\varphi + \psi) = \frac{153}{104}$ 。

情形 2. $\cos \psi = -\frac{12}{37}$, 此时

$$\cos(2\varphi + \psi) = \cos 2\varphi \cos \psi - \sin 2\varphi \sin \psi = -\frac{176}{185}$$

$$\text{则 } \tan(2\varphi + \psi) = \frac{63}{176}.$$

3. 斗拱是中国建筑特有的一种结构，具有非常好的装饰性，图 1 和图 2 是北京故宫太和殿斗拱实物图，图 3 是斗拱构件之一的“斗”的几何体。图 3 中的斗是由棱台与长方体形凹槽（长方体去掉一个长相等，宽和高分别为原长方体的一半的小长方体）贴合组成。若如图 3 所示的棱台两底面面积分别为 200cm^2 , 450cm^2 ，高为 6cm ，长方体凹槽的外侧高为 8cm ，“斗”的密度为 0.50g/cm^3 ，则该“斗”的质量为来源：高三答案公众号

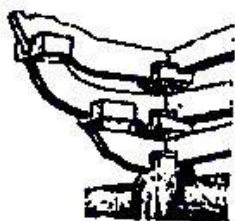


图 1

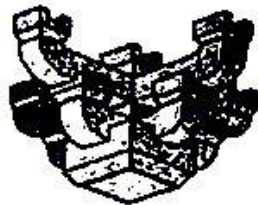


图 2

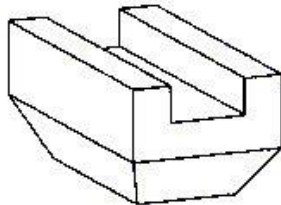


图 3

- A. 2.3kg B. 2.75kg C. 3.2kg D. 3.65kg

答案：A

解析：设 S_1, S_2 分别为面积较小一面、较大一面的面积， h_1, h_2 分别为棱台、长方体的高，密度为 ρ ，则如图所示的凹槽的体积

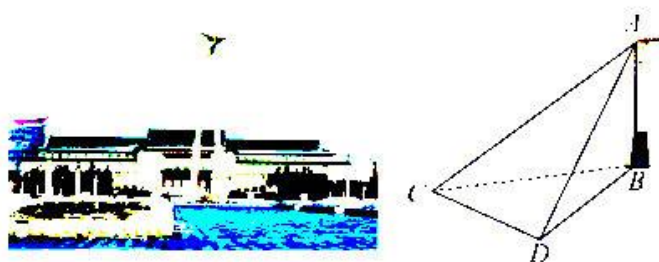
$$\begin{aligned} m &= \rho V \\ &= \rho(V_{\text{台}} + V_{\text{凹}}) \\ &= \rho(V_{\text{台}} + \frac{3}{4}V_{\text{凹}}) \\ &= \rho(\frac{S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}}{3}h_1 + \frac{3}{4}S_2 h_2) \\ &= 2300(\text{g}) = 2.3(\text{kg}) \end{aligned}$$

4. 文化广场原名地质宫广场，是长春市著名的城市广场，历史上地质宫广场曾被规划为伪满洲国的国都广场，文化广场以新民主大街道路中心线至地质宫广场主楼中央为南北主轴，广场的中央是太阳鸟雕塑塔，在地质宫（现为吉林大学地质博物馆）主楼辉映下显得十分壮观，现某兴趣小组准备在文化广场上对中央太阳鸟雕塑塔的高度进行测量，并绘制出测量方案示意图，A 为太阳鸟雕塑最顶端，B 为太阳鸟雕塑塔的基座（即 B 在 A 的正下方），在广场内（与 B 在同一水平面内）选取 C、D 两点，测得 CD 的长为 m ，兴趣小组成员利用测角仪可测得的角有 $\angle ACB, \angle ACD, \angle BCD, \angle ADC, \angle BDC$ ，则根据下列各组中的测量数据，不能计算出太阳鸟雕塑塔高度 AB 的是

- A. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle BDC$ B. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle ACD$
C. $m, \angle ACB, \angle ACD, \angle ADC$ D. $m, \angle ACB, \angle BCD, \angle ADC$

答案：B

解析：A. $m, \angle BCD, \angle BDC$ 可唯一确定 $\triangle BCD$ ，则由锐角三角函数可知 AB 长度。
B. 任意拉长 CD 后关于点 C 等比例放缩，仍然可以保证上述条件。



C. 完全同理于 A.

D. 设 $h = AB$, 考虑 $\angle ACB$, 利用锐角三角函数可表示 AC, BC , 在 $\triangle BCD$ 中由余弦定理可以唯一表示 BD , 从而 AD 可被唯一表示, 在 $\triangle ACD$ 中利用余弦定理即可.

5. Legendre 三平方和定理说的是: 任何一个正整数 n 可以表为三个整数的平方和的充要条件为 $n \neq 4^a(8k+7)$, 其中 $a, k \in \mathbb{N}$. 从 1 到正整数 N 中随机选定一个正整数, 当 N 足够大时, 其可以表为三个整数的平方和的概率接近于

A. $\frac{7}{8}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{2}{3}$

答案: B

解析: 由于 N 足够大, 随 N 的变化对概率变化不大, 则我们只需对整个整数集考虑密度即可.

事实上, 我们考虑所有不满足 Legendre 三平方和的数这样的分类:

$$A_0 = \{8k+7 | k \in \mathbb{N}\}$$

$$A_1 = \{4(8k+7) | k \in \mathbb{N}\}$$

$$A_2 = \{1^2(8k+7) | k \in \mathbb{N}\}$$

...

则 A_0 中的正整数在所有正整数中出现的概率为 $\frac{1}{8}$, A_1 中的正整数在所有正整数中出现的概率为 $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$, A_2 中的正整数在所有正整数中出现的概率为 $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$, ...

则所求概率为

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$$

则可表的数的概率为 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

6. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = a \sin 2x + \sqrt{3}a \cos 2x + 2x$, 则

A. $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减

B. $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

C. $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ 上的最大值为 $\frac{20\pi - 3\sqrt{3}}{6}$

D. $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值大于等于 $\frac{13\pi - 6}{12}$

数学解折第 3 页 (共 30 页)



答案: C

解析: ABD 很容易用排除法排除, 下面只证明 C 选项. 事实上, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 2x$. 考虑函数 $g(t) = \sin t + t$, 则 $f(x) = g(2x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{3}$, $x \in [\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$, 则我们只需要求 $g(t) = \sin t + t, t \in [\frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}]$, 由 $g'(t) = 1 + \cos t \geq 0$, 则 $g(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 取最大值于 $g(t)$ 取最大值, 此时

$$\begin{aligned}\max_{\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}} f(x) &= f(\frac{5\pi}{3}) \\ &= g(\frac{11\pi}{3}) - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{20\pi - 3\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

7. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足对 $x \geq 0$, 都有: $f(x) = x^3$, 若 $\forall x \in [a - 2, a + 2]$, 都有 $f(x^2 + a) > a^3 f(x)$, 则 a 的取值范围为

A. $(\frac{-7 - \sqrt{17}}{4}, 0) \cup (0, 4)$

B. $(\frac{-7 - \sqrt{17}}{4}, 0) \cup (0, 4)$

C. $(-\infty, 0) \cup (0, 4)$

D. $(\frac{-7 - \sqrt{17}}{4}, 0) \cup (0, +\infty)$

答案: C

解析: 由 $f(x) = x^3 (x \geq 0)$ 及 $f(x)$ 为偶函数, 则有: $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$, 且 $f(x) \geq 0$.

(1) 当 $a \leq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 则有

$$f(x^2 + a) \geq 0 \geq a^3 f(x)$$

取等当且仅当 $x^2 + a = 0$ 且 $x = 0$, 此时 $a = 0$. 则 $a < 0$ 符合条件.

(2) 当 $a > 0$ 时, 此时有 $f(a) = a^3$, $f(x)f(y) = f(xy)$, 则有:

$$f(x^2 + a) > a^3 f(x) = f(a)f(x) = f(ax)$$

则由单调性知 $|x^2 + a| > |ax|$, 即 $|x|^2 - a|x| + a > 0$. 若 $x^2 - ax + a = 0$ 有实根, 则设为 x_1, x_2 , 由 Vieta 定理, $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = a > 0$, 则两根均为正数, 从而 x_1, x_2 使上式不成立. 故 $x^2 - ax + a = 0$ 无根, 即 $\Delta = a^2 - 4a < 0$, 则 $0 < a < 4$.

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 4)$.

8. 已知曲线 $C_n: x^2 - 2nx + y^2 = 0 (n = 1, 2, \dots)$, 从点 $P(-1, 0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 $k_n (> 0)$ 的切线 l_n , 切点为 $P_n(x_n, y_n)$, 则以下说法中错误的是

A. 数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n = \frac{n}{n+1}$

B. 数列 $\frac{y_n^2}{n^4}$ 的前 n 项和为 $\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$

C. $x_2 \cdot x_1 \cdots x_{2n} \leq \sqrt{\frac{x_n}{n}}$

D. $\ln x_n - \ln y_n > \frac{2(x_n - y_n)}{x_n + y_n}$

答案: D

解析: A. 由条件, $C_n: (x-n)^2 + y^2 = n^2$, 则 $|PC_n| = n+1$, $|C_n P_n| = n$, 则由勾股定理, $|PP_n|^2 = 2n+1$. 设 P_n 在 x 轴上的投影为 $P'_n(x_n, 0)$, 则由射影定理, $|PP_n|^2 = |PP'_n|(|PC_n| + |C_n P_n|)$, 得 $x_n = \frac{n}{n+1}$.



B. 由 A 及勾股定理, $y_n^2 = n^2 - (n - x_n)^2 = \frac{(2n+1)n^2}{(n+1)^2}$, 则 $\frac{y_n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, 从而求和即得 B.

C. 注意到 $\frac{2n}{(2n+1)^2} < \frac{1}{2n+2}$, 则 $(\frac{2n}{2n+1})^2 < \frac{n}{n+1}$, 则 $\frac{2n}{2n+1} < \sqrt{\frac{n}{n+1}}$, 类乘即得 C.

D. 不等式反号于 ALG 不等式. 来源: 高三答案公众号

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 部分选择的得 2 分, 有选错的得 0 分.

题目	9	10	11	12
答案	AB	BC	AC	AC

9. 如果增加二项分布试验次数, 则其随机变量 X 可近似看作服从正态分布, 对应的概率曲线与函数 $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$) 吻合. 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 记 $t_{\mu, \sigma}(x) = P(\xi < x) (x \in \mathbb{R})$, 则

A. 对任意实数 μ, σ , $y = t'_{\mu, \sigma}(x) \geq 0 (x \in \mathbb{R})$ 恒成立.

B. 函数 $y = t_{0,1}(x)$ 关于 $(0, \frac{1}{2})$ 对称.

C. 当 $\mu_1 \geq \mu_2, \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$ 时, $t_{\mu_1, \sigma_1}(\mu_1 + \sigma_1) + t_{\mu_2, \sigma_2}(\mu_2 - \sigma_2) \geq t_{\mu_1, \sigma_1}(\mu_1 - \sigma_1) + t_{\mu_2, \sigma_2}(\mu_2 + \sigma_2)$, 取等当且仅当 $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1 = \sigma_2$.

D. 当 $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$ 时, $t_{\mu, \sigma_1}(\mu + \sigma_2) + t_{\mu, \sigma_2}(\mu - \sigma_2) \geq t_{\mu, \sigma_1}(\mu - \sigma_2) + t_{\mu, \sigma_2}(\mu + \sigma_2)$, 取等当且仅当 $\sigma_1 = \sigma_2$.

答案: AB

解析: A.

$$y = t'_{\mu, \sigma}(x) = P(\xi = x) \geq 0 (x \in \mathbb{R})$$

必恒成立.

B. 由

$$t_{0,1}(x) + t_{\mu, \sigma}(-x) = P(\xi < x) + P(\xi < -x) = P(\xi < x) + P(\xi > x) = 1$$

则函数 $y = t_{0,1}(x)$ 关于 $(0, \frac{1}{2})$ 对称.

C.

$$t_{\mu_1, \sigma_1}(\mu_1 + \sigma_1) + t_{\mu_2, \sigma_2}(\mu_2 - \sigma_2) = t_{\mu_1, \sigma_1}(\mu_1 - \sigma_1) + t_{\mu_2, \sigma_2}(\mu_2 + \sigma_2)$$

为恒等式.

D.

$$\begin{aligned} & t_{\mu, \sigma_1}(\mu + \sigma_2) + t_{\mu, \sigma_2}(\mu - \sigma_2) - t_{\mu, \sigma_1}(\mu - \sigma_2) - t_{\mu, \sigma_2}(\mu + \sigma_2) \\ &= P(|x| < \frac{\sigma_2}{\sigma_1}) - P(|x| < 1) \\ &= -P(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} < |x| < 1) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$



10. 已知抛物线 $C: y^2 = x$ 的焦点为 F , 准线交 x 轴于点 D , 过点 F 作倾斜角为 θ (θ 为锐角) 的直线交抛物线于 A, B 两点 (其中点 A 在第一象限). 将平面 ADF 沿 x 轴折起, 使面 $ADF \perp$ 面 BDF , 则

- A. 折叠前 $\triangle ABD$ 面积最大值为 $\frac{1}{4}$ B. 折叠前 DF 平分 $\angle ADB$
C. 折叠后三棱锥 $B-ADF$ 的体积恒为 $\frac{1}{18}$ D. 折叠后 AD, BF 所成角随 θ 增大而增大

答案: BC

解析: A. 由条件 $D(-\frac{1}{4}, 0), F(\frac{1}{4}, 0)$, 则由圆锥曲线第二定义, 有:

$$\begin{aligned}\triangle ABD \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} |AB| |DF| \sin \theta \\ &= \frac{1}{4} (|AF| + |BF|) \sin \theta \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2(1-\cos \theta)} + \frac{1}{2(1+\cos \theta)} \right) \sin \theta \\ &= \frac{1}{4 \sin \theta} \\ &\geq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

则折叠前 $\triangle ABD$ 面积最小值为 $\frac{1}{4}$.

B. 设 A, B 在 x 轴上的投影为 A', B' , 则

$$\tan \angle ADA' = \frac{\frac{p \sin \theta}{1 - \cos \theta}}{\frac{p \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = \sin \theta$$

同理, $\tan \angle BDB' = \sin \theta$, 又 $0 < \angle ADA', \angle BDB' < \frac{\pi}{2}$, 则 $\angle ADA' = \angle BDB'$, 故折叠前 DF 平分 $\angle ADB$.

C. 三棱锥 $B-ADF$ 的体积 V 满足:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |DF| |BF| \sin \theta \cdot |AF| \sin \theta \\ &= \frac{1}{12} \frac{1}{2(1+\cos \theta)} \cdot \frac{1}{2(1-\cos \theta)} \cdot \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{48}\end{aligned}$$

D. 设 O, x, y 为原来的 O, x, y 建立右手平面直角坐标系, 对应的单位向量为 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, 则有:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= \frac{1}{2(1-\cos \theta)} \vec{i} + \frac{\sin \theta}{2(1-\cos \theta)} \vec{k} \\ \overrightarrow{FB} &= -\frac{\cos \theta}{2(1+\cos \theta)} \vec{i} - \frac{\sin \theta}{2(1+\cos \theta)} \vec{j}\end{aligned}$$

数学解世第 6 页 (共 30 页)

则有:

$$\begin{aligned}\cos \angle \overline{DA}, \overline{FB} &= \frac{\frac{\cos \theta}{4(1-\cos^2 \theta)}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2(1-\cos \theta)}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{2(1-\cos \theta)}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\cos \theta}{2(1-\cos \theta)}\right)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{2(1-\cos \theta)}\right)^2}} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}}\end{aligned}$$

由分子和分母相反的单调性, 知折叠后 AD, BF 所成角随 θ 增大而减小。

11. 一个函数的我们可以在给定的定义域下进行运算。考虑定义在 $\mathbb{C}$ 上的函数, 我们仍然可以对其进行求导操作。也就是说, 我们沿着任一个方向趋近 z_0 的所得到的值都存在且相等, 用公式表达, 即为

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

对 $z = f(x, y)$ 定义 f 关于 x 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 为 f 在 x 方向的导数, 且 $\sqrt{z}$ 为满足 $(\sqrt{z})^2 = z$ 的一个解, 则

A. $f(z) = z^2$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处可导

B. $f(z) = \sqrt{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处可导

C. $f(z) = \operatorname{Re} z$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处不可导

D. 若 $f'(z)$ 存在, 则 $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$

答案: AC

解析: A. 注意到对 $\mathbb{C}$ 上任一点 z_0 ,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0\end{aligned}$$

结合 z_0 的任意性, $f(z) = z^2$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处可导。

B. $\sqrt{z}$ 的取值不唯一, 不满足条件。

C. 类似于 A 的验证。

D. 设 $z_0 = x_0 + iy_0$, 则沿 x 轴方向时, $z = x + iy_0$, 则有:

$$\begin{aligned}f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\end{aligned}$$

同理可证:

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

则有:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$$

12. 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=5, BC=2\sqrt{13}, CD=11, DA=8, AA_1=3$. 直三棱柱 $EFG-E_1F_1G_1$ 中, $EF=5, FG=7, GE=8, EE_1=3$. 现将三棱柱的某个面与四棱柱的某个面重合, 使得得到的几何体的面数最少, 得到几何体 V' . 在直四棱柱的一点 P , 其投影为得到的几何体的表面积最大的矩形面的中心 O , 且满足 $PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 在矩形面的边界上任一点 R 和其关于中心 O 的对径点 R' , 以 RR' 为长轴, P 为一个短轴顶点作半椭圆, 得到几何体 V'' . 若已知 $\angle BAD=\frac{2\pi}{3}$, 设 V' 的对角线和棱中最长与次长者所在直线夹角为 θ , 则
- A. 四边形 $ABCD$ 无内切圆
B. V' 的表面积可能为 $102+12\sqrt{3}-6\sqrt{13}$
C. $\tan\theta$ 可能为 $\frac{\sqrt{3}}{8}$
D. V'' 的体积可能为 $119\sqrt{3}$

答案: AC

解析: 在 $\triangle EFG$ 中, 由余弦定理,

$$\cos\angle FEG = \frac{|EF|^2 + |EG|^2 - |FG|^2}{2|EF||EG|} = \frac{1}{2}$$

则 $\angle FEG = \frac{\pi}{3}$. 注意到 $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, 在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理, 得

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB||AD|\cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{129}$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{|BD|}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{|AB|}{\sin\angle ADB}$$

解得:

$$\sin\angle ADB = \frac{5}{2\sqrt{43}}, \cos\angle ADB = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{43}}$$

在 $\triangle BDC$ 中, 由余弦定理得

$$\cos\angle BDC = \frac{|BD|^2 + |CD|^2 - |BC|^2}{2|BD||CD|} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}$$

则有:

$$\sin\angle BDC = \sqrt{1 - \cos^2\angle BDC} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

则

$$\begin{aligned}\cos\angle ADC &= \cos(\angle ADB + \angle BDC) \\ &= \cos\angle ADB \cos\angle BDC - \sin\angle ADB \sin\angle BDC \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

则 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$. 从而 $\angle FEG + \angle ADC = \pi$.

显然两个棱柱的高在同一方向, 否则产生的面一定多于其他情形。此时由几何关系知, 面最少当且仅当对应的平面图形的边数最少, 则必有两个图形贴合部分长度相等且角度互补。此时利用平行与相似容易判断仅有这一组可能互补的角, 从而有下面两种情形: 长度为 5 的两条边或长度为 8 的两条边重合。

A. 四边形 $ABCD$ 有内切圆的充要条件为 $AB + CD = BC + AD$, 即 $2\sqrt{13} + 8 = 5 + 11$, 这显然不正确。

B. 当长度为 5 的两条边重合, 则表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{\text{四边形底面}} + S_{\text{三角形底面}}) + 2S_5 + S_7 + S_{11} + S_{2\sqrt{13}} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}(5+11) \times 8 \sin \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \sin \frac{\pi}{3} \right) + (8+8+7+11+2\sqrt{13}) \times 3 \\ &= 102 + 84\sqrt{3} + 6\sqrt{13} \end{aligned}$$

当长度为 8 的两条边重合, 则表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{\text{四边形底面}} + S_{\text{三角形底面}}) + 2S_8 + S_7 + S_{11} + S_{2\sqrt{13}} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}(5+11) \times 8 \sin \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \sin \frac{\pi}{3} \right) + (5+5+7+11+2\sqrt{13}) \times 3 \\ &= 84 + 84\sqrt{3} + 6\sqrt{13} \end{aligned}$$

C. 当长度为 5 的两条边重合, 则由几何性质可判定, 平面上最长的对角线为 $DG = 16$, 次之由余弦定理可得 $CG = \sqrt{201}$, 则最长边和次长边的长度为 $\sqrt{16^2 + 3^2} = \sqrt{265}$, 16, 则夹角的正弦值为 $\frac{3}{16}$ 。

当长度为 8 的两条边重合, 则由几何性质可判定, 平面上最长的对角线为 $DG = 8\sqrt{3}$, 则最长边和次长边的长度为 $\sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{201} \cdot 8\sqrt{3}$, 则夹角的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{8}$ 。

D. V' 中四棱柱的体积为

$$V = \frac{1}{2}(5+11) \cdot 8 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot 3 = 96\sqrt{3}$$

熟知对接与圆柱所有面相切的球的体积为圆柱的 $\frac{2}{3}$, 在改图中为长方体的 $\frac{2}{3}$, 则

$$V' = \frac{2}{3} \times 3 \times l \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}l$$

其中 l 为底面四边形中某条边的长度, 则 V' 不可能取到 $21\sqrt{3}$ 。

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 5048

$$14. \{a|a = 4-t+\frac{4}{t}, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 4\}\}, \{8\}$$

$$15. \frac{49}{169x^2} - \frac{49}{27y^2} = 1(x \neq \pm \frac{13}{7}); \frac{27}{98}(6 + \sqrt{1063})$$

16. 4041
13. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 其中 $\{a_n\}$ 等差数列, 且满足 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 且有 $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = \frac{3^{n+2} - 9 - 6n}{4}$. 记 $v_2(n)$ 为 n 中含 2 的幂次, 则 $v_2(b_n - 1)$ 的前 2023 项和为 $\blacktriangle$.

答案：5048

解析：由条件， $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，则 $a_n = n$ ，从而

$$b_n + 2b_{n-1} + \cdots + nb_1 = \frac{3^{n+2} - 9 - 6n}{4}$$

当 $n = 1$ 时， $b_1 = 3$ ， $n = 2$ 时， $b_2 = 9$ ，当 $n \geq 3$ 时，类似地，有

$$b_{n-1} + \cdots + (n-1)b_1 = \frac{3^{n+1} - 3 - 6n}{4}$$

两式作差，得

$$b_n - b_{n-1} - \cdots - b_1 = \frac{3^{n-1} - 3}{2}$$

类似地，有

$$b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_1 = \frac{3^n - 3}{2}$$

两式作差，解得 $b_n = 3^n (n \geq 3)$ ，综上， $b_n = 3^n$ 。则下面我们计算 $v_2(3^n - 1)$ 。当 n 为奇数时，

$$3^n - 1 = (4 - 1)^n - 1$$

$$= \sum_{i=0}^n C_n^i 4^i (-1)^{n-i} - 1$$

$$= \sum_{i=1}^n C_n^i 4^i (-1)^{n-i} - 2$$

必不被 4 整除，且被 2 整除，则 $v_2(3^n - 1) = 1 (n \text{ 为奇数})$ 。当 n 为偶数时，设 $n = 2^m t$ ，则注意到恒等式

$$3^{2^m} - 1 = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \cdots (3^{2^{m-1}} + 1)$$

则有：来源：高三答案公众号

$$v_2(3^n - 1) = v_2(3^{2^m t} - 1)$$

$$= v_2(3^{2^m} - 1)$$

$$= v_2(3^2 - 1^2) + v_2(3^2 + 1) + v_2(3^4 + 1) + \cdots + v_2(3^{2^{m-1}} + 1)$$

$$= m + 2 = v_2(n) + 2$$

则 $v_2(3^n - 1)$ 的前 2023 项和 S 满足：

$$\begin{aligned} S &= 1012 \times 1 + 506 \times 3 + 253 \times 4 + 126 \times 5 + 63 \times 6 \\ &\quad + 32 \times 7 + 16 \times 8 + 8 \times 9 + 4 \times 10 + 2 \times 11 + 1 \times 12 \\ &= 5048 \end{aligned}$$

14. 实系数四次函数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 8$ 有因式 $x^2 - 4x + 2$ ，记 A 的所有整数根和实

数根分别构成集合 A, B ， $C = \{x | x^2 - ax = 0\}$ ，记 $A * B = \begin{cases} \#A - \#B & \#A \geq \#B \\ \#B - \#A & \#B > \#A \end{cases}$ ，其中

$\#A$ 表示 A 的元素个数，则 X 分别为 A, B 时，若 $X * C = 1$ ， a 的取值范围分别为 ▲。

数学解由第 10 页（共 30 页）



答案: $\{a|a = 1 + t + \frac{4}{t}, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 4\}\}, \{8\}$

解析: $\#C = \begin{cases} 2 & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$

当 $a = 0$ 时, 四根之和为 0, 积为 8, 其中两根之和为 -4, 积为 2, 则令两根之和为 4, 积为 4, 则 $f(x)$ 另有因式 $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, 此时 $\#A = 3, \#B = 1, A * C = 2, B * C = 0$, 均不符合条件。

当 $a \neq 0$ 时, 则 $\#C = 2$, 此时 $\#A, \#B$ 均为奇数, 则必有 $\#A = 1$, 这是由于 $x^2 + 4x + 2$ 的两根为无理数, 类似的 $\#B = 3$ 。设另两根 (可重) 为 x_1, x_2 满足 $x_1 x_2 = 4, x_1 + x_2 + 4 = a$ 。

$\#A = 1$ 的情形: 其中 x_1, x_2 中必恰有一个为整数, 不妨设 $x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \notin \mathbb{Z}$, 则 $x_2 = \frac{4}{x_1}, x_1 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$, 此时 $a = 1 + t + \frac{4}{t}, t \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$, 而 $a = 0 \iff t = -2$, 已包括在内, 即 $\{a|a = 1 + t + \frac{4}{t}, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 4\}\}$

$\#B = 3$ 的情形, 则此时必有 $x_1 = x_2$, 则由 $x_1 x_2 = 4$, 得 $x_1 = x_2 = \pm 2$ 。类似上面的讨论, 只能 $x_1 = x_2 = 2$, 则 $a = 8$, 即 $\{8\}$

15. 双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1, F_2 , C 上任取一非顶点的点 P , PF_1, PF_2 另交 C 于 A, B , 连接 AF_2, BF_1 交于点 Q , 随着点 P 运动, 点 Q 的轨迹方程 Γ 为 , 第一象限的点 M 在 Γ 上, $D_1(-4, 0), D_2(4, 0)$, $\angle D_1 M D_2$ 的角平分线过 $(0, -2)$, 则 $\triangle D_1 M D_2$ 的面积为 。

答案: $\frac{19x^2}{169} + \frac{49y^2}{27} = 1 (x \neq \frac{13}{7})$; $\frac{27}{98}(6 + \sqrt{1063})$ (前一空 3 分, 后一空 2 分)

解析: 设双曲线 C 的实轴、虚轴长为 $2a, 2b$, $|PF_1| = x, |PF_2| = y, |AF_1| = z, |BF_2| = w$, 不妨设 P 在双曲线左支, 则

$$y - x = |AF_2| - z = |BF_1| - w = 2a$$

由圆锥曲线第二定义易得

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2a}{b^2}$$

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{y} = \frac{2a}{b^2}$$

则对 $\triangle AF_2P$ 和割线 QBF_1 , 由 Menelaus 定理, 得:

$$\frac{|AQ|}{|QF_2|} \cdot \frac{|F_2B|}{|BF_1|} \cdot \frac{|PF_1|}{|F_1A|} = 1$$

整理得

$$|F_2Q| = \frac{xw(2a+z)}{yz-wz-wx}$$

同理对 $\triangle BF_1P$ 和割线 QAF_2 , 整理得

$$|F_1Q| = \frac{yz(2a+w)}{yz-wz-wx}$$

则有

$$\begin{aligned}|F_1Q| - |F_2Q| &= \frac{2a(yz - ax) + az(y - x)}{yz - az - ax} \\&= 2a \frac{yz - ax + az}{yz - az - ax} \\&= 2a \frac{\frac{y}{\frac{a}{b^2}} - \frac{x}{\frac{a}{b^2}} + 1}{\frac{y}{\frac{a}{b^2}} - \frac{x}{\frac{a}{b^2}} - 1} \\&= 2a \frac{y(\frac{2a}{b^2} + \frac{1}{y}) + x(\frac{2a}{b^2} - \frac{1}{x}) + 1}{y(\frac{2a}{b^2} + \frac{1}{y}) + x(\frac{2a}{b^2} - \frac{1}{x}) - 1} \\&= \frac{2a(4a^2 + 3b^2)}{4a^2 + b^2}\end{aligned}$$

同理, 当 Q 在双曲线右支时, 则

$$|F_1Q| - |F_2Q| = -\frac{2a(4a^2 + 3b^2)}{4a^2 + b^2}$$

则

$$||F_1Q| - |F_2Q|| = \frac{2a(4a^2 + 3b^2)}{4a^2 + b^2}$$

则 Q 为双曲线的一部分。事实上, 由条件知, 为双曲线去掉两个实轴顶点, 这是由于其他点均不过实轴顶点。设双曲线的实轴、虚轴长为 $2a'$, $2b'$, 则

$$2a' = ||F_1Q| - |F_2Q|| = \frac{2a(4a^2 + 3b^2)}{4a^2 + b^2} = \frac{26}{7}$$

$$\sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$$

解得 $a' = \frac{13}{7}$, $b' = \frac{3\sqrt{3}}{7}$, 则双曲线的一部分 F 的方程为

$$\frac{49x^2}{169} + \frac{49y^2}{27} = 1 (x \neq \frac{13}{7}) \quad (1)$$

由射影定理, $\triangle D_1MD$ 的外接圆的对径点为 $(0, 8)$, 则圆心为 $(0, 3)$, 外接圆半径为 5, 则该外接圆的方程为

$$x^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad (2)$$

将 (1), (2) 联立, 得 $y = \frac{27}{392}(6 + \sqrt{1063})$ (舍负根), 则 $\triangle D_1MD_2$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 8y = \frac{27}{98}(6 + \sqrt{1063})$ 。

16. 在某个星系有 2023 个星球, 且星球中不存在三颗星球共线。星球之间通过宇宙飞船经过直线航路式连接两地。已知任何两个星球都可以经过有限次乘坐宇宙飞船通航, 交通运输部门为保证减少航路占用, 禁止所有航路中存在三角形, 而宇宙飞船公司为降低成本, 要利用尽可能少的航路通航。同时, 宇宙飞船公司为了保证通行效率, 故不恰好连接, 且需要让所有的航路中再增加一条航路就出现三角形, 则宇宙飞船公司最少需要选定通航的航路数为 4041。

答案: 4041

解析: 事实上, 我们可以将上面点放到 $\mathbb{R}^2$ 上, 用非直线段代替直线段让其更容易判断。下面的点即为星球, 边即为直航路。(实际上在 $\mathbb{R}^2$ 上是曲线)

一方面, 我们给出构造: 其中五个点围成五边形, 其余 2018 个点连接两个不相邻的顶点, 此时容易验证可以取到 4041。

另一方面, 当某个顶点 u 仅与一个顶点 v 相连时, 其他顶点 x 必然和 v 相连, 否则, 增加 ux , 其不形成三角形。而此时任意增加一条边, 都会形成三角形, 矛盾, 则此时边的条数 $|E| = 2022$, 恰好连接, 产生矛盾。

若某个顶点 u 仅与两个顶点 v, w 相连, 则我们设仅与 v, w 连接的点集为 A, B , 除 u 外的与 v, w 均相连的点构成点集 C 。显然, A, B, C 为对除 u, v, w 外的 2020 个点的分划, 且 A, B 同时是否非空。此时 $A \cup C$ 与 $B \cup C$ 内的点必不互相连接, A, B 间任两点必连接, 不然连接两点后, 容易检验不可能产生三角形, 则对应形成的边数满足:

$$\begin{aligned} |E| &\geq |A||B| + |A| + |B| + 2|C| + 2 \\ &= 4041 + (|A| - 1)(|B| - 1) \geq 4041 \end{aligned}$$

若某个顶点 u 仅与三个顶点相连, 则设其与 x, y, z 相连, 且 $|E| \leq 4040$, 此时所有的点被连接的边的数之和

$$2|E| \geq 3 + 2018 + 3 \times 2019 = 8082$$

3 是 u 对 x, y, z 的连接边数, 其余 2018 个点至少与 x, y, z 中任一个相连, u 及其余 2018 个点至少连接三条边, 则计数得到上式, 则

$$|E| \geq 4041$$

而若每个顶点均连接至少四个顶点, 此时显然有:

$$2|E| \geq 4 \times 2023 > 8082$$

综上所述, $|E|_{\min} = 4041$ 。

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或者演算步骤。

17. (10 分)

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, $A_1D_1 = AA_1 = 2$, $A_1B_1 = 1$, M, N 为 C_1D_1, B_1C_1 上的动点。

(1) M, N 分别为 C_1D_1, B_1C_1 中点时, 证明: $MN \parallel$ 平面 BDD_1B_1 ;

(2) 求 D 到面 A_1D_1N 的距离的取值范围。

(1) 取 C_1D_1, C_1B_1 中点, 分别记为 P, Q , 连接 MP, NQ, PQ, MN , 则 MP 为 $\triangle CDD_1$ 中 DD_1 边上的中位线, 故 $MP \parallel DD_1$, 同理有 $NQ \parallel CC_1, PQ \parallel D_1B_1$ 。由于在直棱柱中有 $CC_1 \parallel DD_1$, 所以 $MP \parallel NQ$, 进而 M, P, N, Q 四点共面。

.....1 分

因为 $MP \parallel DD_1, PQ \parallel D_1B_1, MP \cap PQ = P, DD_1 \cap D_1B_1 = D_1, MP, PQ \subset$ 平面 $MPQN$, $DD_1, D_1B_1 \subset$ 平面 BDD_1B_1 , 所以平面 $MPQN \parallel$ 平面 BDD_1B_1 。

.....3 分

因为 $MN \subset$ 平面 $MPQN$, 所以 $MN \parallel$ 平面 BDD_1B_1 。

.....4 分

(2) 由余弦定理, 得

$$\cos \angle DAB = \frac{|AD|^2 + |AB|^2 - |BD|^2}{2|AD||AB|} = 0$$

则有 $BD \perp AB$. 作 $\triangle ABD$ 的 AD 边上的高 BH , 则 $BH = \frac{AB \cdot BD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

.....5 分

由 $A_1A \perp$ 平面 $ABCD$, $BH \subset$ 平面 $ABCD$, 则 $A_1A \perp BH$. 而 $\angle BH \perp AD, AD \cap A_1A = A, A_1A, AD \subset$ 平面 ADD_1A_1 , 则 $BH \perp$ 平面 ADD_1A_1 . 同理 $BH \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 则 BH 的长度即为平面 ADD_1A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离. 即三棱锥 $N-A_1D_1D$ 中以 $\triangle A_1D_1D$ 为底面的高与 BH 长度相等. 则有:

$$V_{N-A_1D_1D} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot A_1D_1 \cdot D_1D \cdot BH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

.....7 分

过 N 作 A_1D_1, B_1C_1 的垂线, 垂足记为 E, F . 结合 $C_1C \perp B_1C_1$ 且 C_1C, NF 共面知 $NF \parallel B_1C_1$. 由 $C_1C \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 则 $NF \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$. 则 EF 为 NF 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内的投影. 由三垂线定理的逆定理知 $EF \perp A_1D_1$, 则 $EF = BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

.....8 分

因为 $NF \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1, EF \subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $NF \perp EF$. 设 $NF = x \in [0, 2]$. 则

$$NE = \sqrt{EF^2 + NF^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + x^2}$$

.....9 分

则

$$\begin{aligned} D \text{ 到 } \triangle A_1D_1N \text{ 的距离} &= \frac{3V_{N-A_1D_1D}}{S_{\triangle A_1D_1N}} \\ &= \frac{3V_{N-A_1D_1D}}{\frac{1}{2} \cdot A_1D_1 \cdot NE} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}}} \in \left[\frac{2\sqrt{57}}{19}, 2 \right] \end{aligned}$$

.....10 分

18. (12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 分别对应边 a, b, c . 若 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos 2C = 0$,

(1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A \sin B}$ 的最小值;

(2) 若 $A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$, 且 $AB = 6$, 求 $\triangle ABC$ 的面积取值范围.

注意到:

$$\begin{aligned}
 0 &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos 2C \\
 &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C \\
 &= 1 - \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos 2C \\
 &= 1 - \cos C \cos(A-B) - 2\cos^2 C - 1 \\
 &= -\cos C(\cos(A-B) + 2\cos(A+B)) \\
 &= -\cos C(\sin A \sin B - 3\cos A \cos B)
 \end{aligned}$$

.....3 分

则有: $\cos C = 0$ 或 $\sin A \sin B = 3\cos A \cos B$. 由 $\sin A \sin B > 0$, 则 $\cos A \cos B > 0$, 则 $\tan A \tan B = 3$.

(1) 由条件, 则: ①当 $C = \frac{\pi}{2}$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin C}{\sin A \sin B} &= \frac{1}{\sin A \sin B} \\
 &= \frac{2}{\sin 2A} \geq 2
 \end{aligned}$$

.....5 分

②当 $\tan A \tan B = 3$ 时, 有:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin C}{\sin A \sin B} &= \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} \\
 &= \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin A \sin B} \\
 &= \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} \\
 &\geq \frac{2}{\sqrt{\tan A \tan B}} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

.....7 分

注意到 $2 > \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 且当 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 时, 可以取等。则 $\frac{\sin C}{\sin A \sin B}$ 的最小值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

.....8 分

(2) ①当 $C = \frac{\pi}{2}$ 时, 由条件, $2A \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, 则

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \cdot 6 \sin A \cdot 6 \sin B \\
 &= 18 \sin A \cos A \\
 &= 9 \sin 2A \in (\frac{9\sqrt{3}}{2}, 9)
 \end{aligned}$$



.....9 分

②当 $\tan A \tan B = 3$ 时, 有:

$$\tan C = \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \frac{\tan A + \tan B}{2}$$

.....10 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{6}{\sin C}$$

则有

$$a = \frac{6 \sin A}{\sin C}, b = \frac{6 \sin B}{\sin C}$$

.....11 分

考虑 $\tan A + \tan B = \tan A + \frac{3}{\tan A}$, 考虑函数 $f(x) = x + \frac{3}{x}$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 上单调递减, 则 $\tan A + \tan B \in (f(1), f(\frac{\sqrt{3}}{3})) = (4, \frac{10\sqrt{3}}{3})$.

则由 (1),

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 的面积} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \sin A}{\sin C} \cdot \frac{6 \sin B}{\sin C} \cdot \sin C = 18 \frac{\sin A \sin B}{\sin C} \\ &= \frac{54}{\tan A + \tan B} \in (\frac{27\sqrt{3}}{5}, \frac{27}{2}) \end{aligned}$$

综上所述, $\triangle ABC$ 的面积取值范围为 $(\frac{9\sqrt{3}}{2}, 9) \cup (\frac{27\sqrt{3}}{5}, \frac{27}{2})$.

.....12 分

19. (12 分)

平面 $\mathbb{R}^2$ 上有 n 个红点, n 个蓝点, n 个黄点, 这 $3n$ 个点两两不同且不重合,

(1) 对颜色不同的任两点之间连接一条线段, 颜色相同的两点之间不连接线段, 则求连接线段条数的最大可能值;

(2) 若 $3n$ 个点中任三点不共线, 此时将所有互异的点之间连线, 并给线段端点颜色相同的线段赋值 1, 端点不同的线段赋值 2,

①当 $n = 4$ 时, 在所有线段中任取一条线段, 按两个端点的颜色进行分类 (端点无序), 讨论分类 X 的分布列及数学期望;

②对任意的正整数 n , 在所有线段中取三条构成三角形的线段, 记该三角形的三边的赋值之和的数学期望为 E_n , 证明: 对 $n \geq 4$, 有:

$$\sum_{i=1}^n \frac{6}{E_n - 3} < 3n - e \ln \frac{\pi^2}{6}$$

(1) 红蓝、蓝黄、黄红三对里, 每对中两种颜色均有 n 个点, 则连接线段条数的最大值为 $3n^2$, 取等于 $3n$ 个点中任三者不共线.

.....2 分

(2) 以端点的颜色为自变量 X , 则 X 的所有取值为红蓝、蓝蓝、黄红、红红、蓝蓝、黄黄。

任两个同色点内部连线条数为 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, 不同色点间连线条数为 n^2 , 总点数为 $C_{3n}^2 = \frac{3n(3n-1)}{2}$.

.....4 分

则

$$P(\text{红红}) = P(\text{蓝蓝}) = P(\text{黄黄}) = \frac{n-1}{3(3n-1)}$$

$$P(\text{红蓝}) = P(\text{蓝黄}) = P(\text{黄红}) = \frac{2n}{3(3n-1)}$$

.....5 分

则分布列为

X	红红	蓝蓝	黄黄	红蓝	蓝黄	黄红
P_X	$\frac{n-1}{3(3n-1)}$	$\frac{n-1}{3(3n-1)}$	$\frac{n-1}{3(3n-1)}$	$\frac{2n}{3(3n-1)}$	$\frac{2n}{3(3n-1)}$	$\frac{2n}{3(3n-1)}$

.....6 分

则数学期望为 $E_n = \frac{5n-1}{3n-1}$, 特别地, $n=4$ 时, $E_n = \frac{19}{11}$.

.....7 分

(2) 共有三种可能, 当三个同色点构成三角形时, 此时赋值和为 6, 共有 $3C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ 种可能; 当两个同色点和一个异色点构成三角形时, 此时赋值和为 5, 共有 $C_3^1 C_2^1 C_n^2 C_n^1 = 3n^2(n-1)$ 种可能; 当三个异色点构成三角形时, 此时赋值和为 3, 共有 n^3 种可能. 共有 $C_{3n}^3 = \frac{n(3n-1)(3n-2)}{2}$ 种可能.

.....9 分

则

$$\begin{aligned} \frac{6}{E_n - 3} &= \frac{6}{6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2} + 5 \cdot 3n^2(n-1) + 3 \cdot n^3} \\ &= 3 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

.....10 分

设函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(x) > 0 (0 < x < e)$, 则 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 则 $f(2) < f(e)$, 即 $e \ln 2 < 2$.

.....11 分

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{6}{E_n - 3} &= 3n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \\ &< 3n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &< 3n - 2 \\ &< 3n - e \ln 2 \\ &< 3n - e \ln \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

12 分

20. (12 分)

已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = ae^{-x} + \frac{\ln x}{x}$.

(1) 当 $a > 0$ 时,

①证明: $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上有唯一零点 x_0 和唯一极值点 x' ;

②证明: 若 $0 < a < 1$, 则有:

$$\ln x' < x_0^2 - x_0 + 1$$

(2) 当 $a = 0$ 时, 设 $f(x) = m$ 有两根, 分别为 x_1, x_2 , 已知 $x_2 > 3x_1$, 若实数 p 使得不等式

$$2x_1 + \frac{2p}{m} \ln x_2 > (3p + 1) \ln 3$$

恒成立, 求 p 的取值范围.

(1) ① $f'(x) = -ae^{-x} + \frac{1 - \ln x}{x^2}$. 令 $g(x) = e^{-x} + x$, 则 $g'(x) = -e^{-x} + 1$. $g'(x) > 0 (x > 0)$, $g'(x) < 0 (x < 0)$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 则 $g(x) \geq 1 > 0$.
.....1 分

令 $h(x) = e^x f(x) = a + \frac{e^x \ln x}{x}$, 则

$$h'(x) = \frac{e^x}{x^2} ((x-1) \ln x + 1) > 0$$

则 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 又

$$h(e^{-a}) = a(1 - e^{-a+a}) = a(1 - e^{0(a)}) < 0$$

且

$$h(1) = a > 0$$

则由零点存在性定理, 存在 $x_0 \in (e^{-a}, 1) \subset (0, e)$, 使得 $h(x_0) = 0$. 且由单调性知 $h(x) < 0 (0 < x < x_0)$, $h(x) > 0 (x_0 < x < e)$, 则 $f(x) = e^{-x} h(x)$ 在 $(0, e)$ 上有唯一零点.
.....2 分



令 $i(x) = e^x f'(x) = -a + \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 则 $i'(x) = \frac{e^x}{x^3} (x(\ln x - 1) - 1) < 0$, 则 $i(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减, 又

$$i(e^{-a}) = -a + (1+a)e^{2a} = (e^{2a} - 1)a + e^{2a} > 0$$

且

$$i(e) = a < 0$$

则由零点存在性定理, 存在 $x' \in (e^{-a}, e) \subset (0, e)$, 使得 $i(x') = 0$, 且由单调性知 $i(x) < 0 (0 < x < x')$, $i(x) > 0 (x' < x < e)$, 则 $f'(x) = i(x)$ 在 $(0, e)$ 上有唯一零点, 则 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上有唯一极值点.

.....4 分

②由①,

$$\frac{e^{x_0} \ln x_0}{x_0} = -a$$

$$\frac{e^{x'} (1 - \ln x')}{x'^2} = a$$

则有:

$$\frac{e^{x_0} \ln x_0}{x_0} = \frac{e^{x'} (\ln x' - 1)}{x'^2}$$

则有:

$$\ln x' = \frac{x'^2 e^{x_0} \ln x_0}{x_0 e^{x'}} + 1$$

则与所求证式对比, 只需证:

$$\frac{x'^2}{e^{x'}} > \frac{x_0^3 - x_0^2}{e^{x_0} \ln x_0}$$

.....5 分

由①可知 $x_0 - 1 > \ln x_0$, 由 $x_0 \in (0, 1)$, 则

$$\frac{x_0 - 1}{\ln x_0} < 1 \quad (1)$$

由 $a < 1$, 则 $i(1) > 0$, 从而 $x' \in (1, e)$. 设 $j(x) = \frac{x^2}{e^x}$, 则 $j'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}$, 则 $j(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减. 由 $x_1 \in (1, e)$, 则 $h(x') > \min\{h(1), h(e)\} = h(1) > h(x_0)$, 则

$$\frac{x_0^2}{e^{x_0}} > \frac{x'^2}{e^{x'}} \quad (2)$$

由 (1) $\times$ (2), 即得求证式成立.

.....7 分

(2) 设 $x_2 = kx_1$, 则由条件, $k > 3$, 则由条件式,

$$\frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_1 + \ln k}{kx_1}$$

则有:

$$x_1 = k^{\frac{1}{k-1}}, x_2 = k^{\frac{k}{k-1}}$$



.....8 分

则有:

$$x_1 + px_2 = (1 - pk)k^{\frac{1}{k-1}}$$

设 $k(x) = (1 - px)x^{\frac{1}{k-1}}$, 则

$$k'(x) = p(x^2 - x - x \ln x) - (\ln x - \frac{x-1}{x})$$

$$\text{令 } l(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{x^2 - x - x \ln x}, \text{ 则}$$

$$l'(x) = \frac{2 \ln x + x \ln^2 x - 2x^2 \ln x + 3x^2 - 6x - 3}{2x^3 \ln x - 2x^4 \ln x + x^5 - x^3 \ln^2 x - 2x^4 + x^3}$$

$$\text{令 } m(x) = 2 \frac{\ln x}{x} + \ln^2 x - 2x \ln x + 3x - 6 + \frac{3}{x}, \text{ 则}$$

$$m'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2(x^2 - x + 1) \ln x}{x^2}$$

$$\text{令 } n(x) = \ln x - \frac{x^2 - 1}{2(x^2 - x + 1)}, \text{ 则}$$

$$n'(x) = \frac{(x-1)^2(2x^2 + x + 2)}{2x(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)}$$

由

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = x^2(x-1)^2 + (x-1)^2 + x^2 > 0$$

则 $n'(x) \geq 0$, 则 $n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则由 $n(1) = 0$, 则 $n(x) < 0 (0 < x < 1)$, $n(x) > 0 (x > 1)$, 则 $m'(x) > 0 (x > 1)$, $m'(x) < 0 (0 < x < 1)$, 则 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 由 $m(1) = 0$, 则 $m(x) \leq 0$.

令 $p(x) = 2 \ln x - 2x \ln x + x^2 + \ln^2 x - 2x + 1$, 则

$$\begin{aligned} p'(x) &= \frac{2}{x} + 2x - 2 \ln x + 2 \frac{\ln x}{x} - 4 \\ &= \frac{2(x-1)^2}{x} - 2 \ln x \frac{1-x}{x} \\ &= \frac{2(x-1)}{x} (x-1 - \ln x) \end{aligned}$$

则 $p'(x) > 0 (x > 1)$, $p'(x) < 0 (x < 1)$, 则 $p(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $p(x) \geq p(1) = 0 (x > 0)$, 则 $l'(x) \leq 0 (x > 0)$, 则 $l(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则在 $(3, +\infty)$ 上, $l(x) \leq \frac{(3 \ln 3 - 2)}{9(2 - \ln 3)}$ 在 $(3, +\infty)$ 上恒成立, 记 $p_0 = \frac{(3 \ln 3 - 2)}{9(2 - \ln 3)}$, 则:

.....10 分

(3) 当 $p \geq p_0$ 时, 由上面的讨论, 注意到由 (1) 型 $x - 1 - \ln x \geq 0$, 可知: 此时 $k'(x) \leq 0$, 则有 $k(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上单调递减, 则 $k(x) \leq \frac{1+3p}{2} \ln 3$, 从而有上面的命题成立。



.....11 分

②当 $p < p_0$ 时, 由上面的讨论, 结合单调性, 注意到, 当 $p > 0$ 时, 则在 $(3, +\infty)$ 上, $k'(x) = (x^2 - x - x \ln x)(p - l(x))$. 令 $q(x) = -2 \ln x + x + \frac{1}{x}$, 则 $q'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$, 则 $q(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $q(x) \geq q(1) = 0 (x \geq 1)$, 则 $0 < l(x) \leq \frac{1}{x}$, 则类似上面讨论, 可知存在 $x'' \in (3, +\infty)$, 使得 $l(x'') = \frac{p - p_0}{2}$, 此时显然在 $(3, x'')$ 上 $k'(x) < 0$, 则 $k(x)$ 在 $(3, x'')$ 上 $k(x)$ 单调递减, 则

$$k(x'') < k(3) = (3p + 1) \ln 3$$

而当 $p \leq 0$ 时, 同理显然可证。

综上所述, p 的取值范围为 $[\frac{(3 \ln 3 - 2)}{9(2 - \ln 3)}, +\infty)$.

.....12 分

21. (12 分)

已知整数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别为等差数列和等比数列, $a_1 = b_1 = 2$, 且满足不等式 $c_1 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c_2$ 的 c_1 的最大值为 0, c_2 的最小值为 $\frac{5}{4}$. 若存在正整数 $k \neq l$, 使得 $\frac{a_k}{a_l} = \frac{b_k}{b_l}$,

(1) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $A_n = \{m | m = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i b_i, i = 1, 2, \dots, n, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$, 若 $A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$, 则求

$$\sum_{x \in A} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)$$

的值;

(3) 直接写出最佳常数 C , 使得不等式

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_n b_n} < C$$

恒成立, 不需证明。

(1) 由 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别为等差、等比数列, 则设两数列的公差、公比分别为 d, q , 则 $a_n = 2 + (n-1)d$, $b_n = 2 \cdot q^{n-1}$, 则下面首先证明: $d > 0, q > 1$ 且均为整数。事实上, 由 $\{a_n\}$ 为整数列, 且 $d = a_2 - a_1$ 为整数, 同时由 $q = \frac{a_2}{a_1}$ 为有理数, 则若 q 不为整数, 则设 $q = \frac{m}{n}$, 其中 m, n 互素, $n \neq 1$, 取 n 的一个素因子 p , 则设 a_1 中含 p 的幂次为 α , 则 a_{n-2} 中含 p 的幂次小于 0, 即 a_{n+2} 不为整数, 矛盾!

.....1 分

a. 若 $d < 0$, 则对 $n > 3$, 有 $a_n < 0$, 则令 $n = 5$, 则有 $\frac{a_n}{b_n} < 0$, 矛盾!

b. 若 $d = 0$, 则有 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{q^{n-1}}$, 则:

(A) 若 $q < 0$, 则 $\frac{a_2}{b_2} = \frac{1}{q} < 0$, 矛盾!

(B) 若 $q > 0$, 则 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{q^{n-1}}$ 的最大值为 1.

c. 若 $q < 0$, 根据上面讨论, 则只能 $d > 0$, 此时有 $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2}{2q} < 0$, 矛盾!

d. 若 $q = 1$, 则 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2 - (n-1)d}{2}$, 则 1 的最值中一个, 矛盾!

.....2 分

则有: 当 $n \geq 2$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{2 - nd}{2q^n} - \frac{2 - (n-1)d}{2q^{n-1}} = \frac{2(1-q) + d(n-q(n-1))}{2q^n}$$

由 q 为大于 1 的整数, 则 $q \geq 2$, 则对 $n \geq 2$, 有: $q(n-1) \geq 2(n-1) \geq n$, 及 $1-q < 0$, 则有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} < 0$, 则对 $n \geq 2$, $\{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\}$ 单调递减. 来源: 高三答案公众号

.....3 分

则注意到 $\frac{a_1}{b_1} = 1$, 及单调性, 只能 $\frac{a_2}{b_2} = \frac{5}{4}, \frac{a_3}{b_3} \geq 1, \frac{a_2}{b_2} = \frac{5}{4}$ 等价于 $2(2+d) = 5q$, 则 $d \geq 3$.

.....4 分

又由 $\frac{a_3}{b_3} \geq 1$, 则有:

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{1+d}{q^2} = \frac{25}{4} \cdot \frac{1+d}{(2+d)^2} = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{(\sqrt{d+1} + \frac{1}{\sqrt{d+1}})^2}$$

构造函数 $y = x + \frac{1}{x}$, 则 $y' = 1 - \frac{1}{x^2} > 0 (x > 1)$, $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 则由 $d \geq 3$, 则 $\sqrt{d+1} \geq 2$, 对 $x \geq 2, x + \frac{1}{x} \geq \frac{5}{2}$.

.....5 分

则有 $1 \leq \frac{a_3}{b_3} \leq 1$, 从而上述的等号均成立, $d = 3, q = 2$, 解得 $a_n = 3n - 1, b_n = 2^n$.

.....6 分

(2) 我们依次证明几个命题: (i) 若 $x \in A$, 则 $-x \in A$.

事实上, 由 $x \in A$, 则 $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, 使得 $x = \varepsilon_n \cdot 2^n + \varepsilon_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + \varepsilon_1 \cdot 2^1$, 则 $-x = (-\varepsilon_n) \cdot 2^n + (-\varepsilon_{n-1}) \cdot 2^{n-1} + \dots + (-\varepsilon_1) \cdot 2^1$, 其中 $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \dots, -\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, 则 $-x \in A$.

.....7 分

(ii) $x \in A$, x 不能被两个不同的 $k^2 (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ 所表示.

若不然, 则设

$$x = \varepsilon_n \cdot 2^n + \varepsilon_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + \varepsilon_1 \cdot 2$$

$$x = \varepsilon'_n \cdot 2^n + \varepsilon'_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + \varepsilon'_1 \cdot 2$$

其中 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \neq (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$, 则存在最大的 m , 使得 $\varepsilon_m \neq \varepsilon'_m$, 不妨设 $\varepsilon_m = 1$, 则 $\varepsilon'_m = -1$, 则对上面两式作差, 有:

$$\begin{aligned} 2^{m+1} &= \varepsilon_m \cdot 2^m - \varepsilon'_m \cdot 2^m \\ &= \varepsilon'_1 \cdot 2 + \varepsilon'_2 \cdot 2^2 + \dots + \varepsilon'_{m-1} \cdot 2^{m-1} - (\varepsilon_1 \cdot 2 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + \dots + \varepsilon_{m-1} \cdot 2^{m-1}) \\ &\leq 2^{m+1} - 1 \end{aligned}$$

矛盾！

.....8 分

③求和： $\sum_{x \in A} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)$ 。

事实上，注意到：

$$\sum_{x \in A|_{>0}} \varepsilon_i \varepsilon_j 2^{i+j} = 0, 1 \leq i \neq j \leq 3n-1$$

这是由于对每个 ε_i ， $\varepsilon_j = \varepsilon_i$ 或 $-\varepsilon_i$ 的各有一半，则对每个 i 计数的和均为 0。

同理可得：

$$\sum_{x \in A|_{>0}} \varepsilon_i^3 \varepsilon_j 2^{3i+j} = 0, 1 \leq i \neq j \leq 3n-1$$

$$\sum_{x \in A|_{>0}} \varepsilon_i^2 \varepsilon_j \varepsilon_k 2^{2i-j+k} = 0, 1 \leq i \neq j \neq k \leq 3n-1$$

$$\sum_{x \in A|_{>0}} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_l 2^{i+j+k+l} = 0, 1 \leq i \neq j \neq k \neq l \leq 3n-1$$

.....10 分

则由上面的论断，有：

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4) &= \sum_{x \in A|_{>0}} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4) + \sum_{x \in A|_{<0}} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4) \\ &= 2 \sum_{x \in A|_{>0}} (1 + 3x^2 + 5x^4) \\ &= 2^n + 6 \cdot \sum_{x \in A|_{>0}} x^2 + 10 \cdot \sum_{x \in A|_{>0}} x^4 \\ &= 2^{3n-1} + 6 \cdot 2^{3n-2} \cdot \sum_{k=1}^{3n-1} (2^k)^2 + 10 \cdot 2^{3n-2} \left[\sum_{k=1}^{3n-1} (2^k)^4 + 3 \cdot \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3n-1} (2^i)^2 (2^j)^2 \right] \\ &= 2^{3n-1} + 3 \cdot 2^{3n+1} \cdot \frac{4^{3n} - 1}{3} + 5 \cdot 2^{3n+3} \cdot \frac{16^{3n} - 1}{15} \\ &\quad + 15 \cdot 2^{3n-1} \left[\left(\frac{4(4^{3n-1} - 1)}{3} \right)^2 - \frac{16(16^{3n-1} - 1)}{15} \right] \\ &= \frac{103}{6} \cdot 2^{3n} - \frac{37}{6} \cdot 2^{3n} + 2^{15n-1} \end{aligned}$$

.....11 分

(3)

$$C = \frac{1}{6\sqrt[3]{2}} \left[\frac{1}{(\sqrt[3]{2}-1)^3} - 2\sqrt{3} \arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{3}}\right) \right]$$

.....12 分

22. (12 分)

椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，椭圆的两条相互垂直的切线交于点 P ，随切线运动点 P 的轨迹曲线为 F 。

F 。

(1) 求 F 的轨迹方程；



(2) 设 C 的一条切线与 C 切于点 S , 交 F 于 A, B , 过 S 的垂线另交 C 于 T , 求 $\frac{|ST|}{|AB|}$ 的取值范围;

(3) 在第二问的基础上, 求 $\triangle AST$ 面积的最大值.

(1) 有一条切线垂直于 x 轴时, 显然 (x_0, y_0) 满足 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, 不然, 设 $P(x_0, y_0)$, 切线斜率为 k_1, k_2 , 则 $k_1 k_2 = -1$, 且设直线 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 为切线, 则将切线 l 与 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 联立, 则有

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= b^2 x^2 + a^2 y^2 \\ &= b^2 x^2 + a^2 (k(x - x_0) + y_0)^2 \\ &= (b^2 + a^2 k^2)x^2 + 2a^2 k(y_0 - kx_0)x + a^2 (kx_0 - y_0)^2 \end{aligned}$$

.....1 分

由相切, 则其必满足 $\Delta = 0$, 即

$$\begin{aligned} 0 &= 4a^4 k^2 (y_0 - kx_0)^2 - 4(b^2 + a^2 k^2)[a^2 (y_0 - kx_0)^2 - a^2 b^2] \\ &= -4a^2 b^2 [(y_0 - kx_0)^2 - b^2 - a^2 k^2] \\ &= 4a^2 b^2 [(a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0 y_0 k + b^2 - y_0^2] \end{aligned}$$

则 $k_1 k_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1$, 则有:

$$F: x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2, x_0 \neq \pm a$$

综上所述, $F: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

.....2 分

(2) 当切线斜率不存在时,

$$\frac{|ST|}{|AB|} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

当切线斜率存在时, 设切线: $y = kx + m$, 将其与椭圆标准方程联立, 得

$$(b^2 + a^2 k^2)x^2 + 2a^2 kmx + a^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$$

则其的判别式 $\Delta = 4a^4 k^2 m^2 - 4a^2 (b^2 + a^2 k^2)(m^2 - b^2)$

整理得

$$b^2 k^2 + a^2 = m^2$$

.....3 分

设 $S(x_0, y_0)$, 且 S 位于第一象限, 则由 (1) 的过程容易解得

$$m = \frac{b^2}{y_0}, k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

则联立 $y = kx + m$ 与 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, 有

$$(1 + k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - a^2 - b^2 = 0$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{2km}{1+k^2}x_1x_2 = \frac{m^2 - a^2 - b^2}{1+k^2},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{1+k^2}|x_1 - x_2| \\ &= \sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{4k^2m^2 - 4(k^2+1)[m^2 - (a^2 + b^2)]}{1+k^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{b^2k^2 + a^2}}{\sqrt{1+k^2}} \end{aligned}$$

设 e 为离心率, 设 $ST: y = k'x + m'$, 则 $k' = -\frac{1}{k} = \frac{a^2}{b^2} \frac{y_0}{x_0}$, 则

$$ST: y - y_0 = \frac{a^2}{b^2} \frac{y_0}{x_0} (x - x_0)$$

整理得

$$ST: y = \frac{a^2}{b^2} \frac{y_0}{x_0} x - \frac{e^2}{b^2} y_0$$

$$\text{则 } m = \frac{e^2}{y_0}.$$

将 $y = k'x + m'$ 与 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 联立, 类似解得

$$|ST| = \sqrt{1+k'^2} \frac{2ab\sqrt{a^2k'^2 - b^2 - m'^2}}{b^2 + a^2k'^2}$$



则

$$\begin{aligned}
 \frac{|ST|}{|AB|} &= \frac{\sqrt{1+k'^2} \frac{2ab\sqrt{a^2k'^2+b^2-m'^2}}{b^2+a^2k'^2}}{\frac{2\sqrt{b^2k^2+a^2}}{\sqrt{1-k^2}}} \\
 &= \sqrt{1+k^2} \sqrt{1-k'^2} \frac{ab\sqrt{a^2k'^2+b^2-m'^2}}{(b^2+a^2k'^2)\sqrt{b^2k^2+a^2}} \\
 &= \sqrt{1+k^2} \sqrt{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2} \frac{ab\sqrt{a^2k'^2+b^2-m'^2}}{(b^2+a^2k'^2)\sqrt{b^2k^2+a^2}} \\
 &= -\left(k+\frac{1}{k}\right) \frac{ab\sqrt{\frac{b^2k^2+a^2}{k^2}-\frac{c^4}{m^2}}}{\left(\frac{b^2k^2+a^2}{k^2}\right)\sqrt{b^2k^2+a^2}} \\
 &= -\left(k+\frac{1}{k}\right) \frac{ab\sqrt{\frac{b^2k^2+a^2}{k^2}-\frac{c^4}{a^2k^2+b^2}}}{\left(\frac{b^2k^2+a^2}{k^2}\right)\sqrt{b^2k^2+a^2}} \\
 &= -\left(k+\frac{1}{k}\right) \frac{ab\sqrt{\frac{(b^2k^2+a^2)(a^2k^2+b^2)-k^2(a^2-b^2)^2}{k^2(a^2k^2+b^2)}}}{\left(\frac{b^2k^2+a^2}{k^2}\right)\sqrt{b^2k^2+a^2}} \\
 &= \left(k+\frac{1}{k}\right) \frac{a^2b^2 \frac{(k^2+1)^2}{k\sqrt{a^2k^2+b^2}}}{\left(\frac{b^2k^2+a^2}{k^2}\right)\sqrt{b^2k^2+a^2}} \\
 &= \left(k+\frac{1}{k}\right)^2 \frac{\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2k^2+b^2}}}{\frac{b^2k^2+a^2}{k^2}\sqrt{b^2k^2+a^2}} \\
 &= \frac{a^2b^2(k^2+1)^2}{(b^2k^2+a^2)^{\frac{3}{2}}(a^2k^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{a^2b^2}{\sqrt{\left(\frac{b^2k^2+a^2}{k^2+1}\right)^3 \left(\frac{a^2k^2+b^2}{k^2+1}\right)}} \\
 &= \frac{a^2b^2}{\sqrt{\left(b^2+\frac{a^2-b^2}{k^2+1}\right)^3 \left(a^2-\frac{a^2-b^2}{k^2+1}\right)}} \\
 &\stackrel{\lambda=\frac{a^2-b^2}{k^2+1}}{=} \frac{a^2b^2}{\sqrt{(b^2+\lambda)^3(a^2-\lambda)}}
 \end{aligned}$$

则 $\lambda \in (0, a^2 - b^2]$, 令 $f(\lambda) = (b^2 + \lambda)^3(a^2 - \lambda)$, 则 $f'(\lambda) = (b^2 + \lambda)^2(3a^2 - 4\lambda)$



$f'(\lambda) > 0 (\lambda < \frac{3a^2 - b^2}{4})$, $f'(\lambda) < 0 (\lambda > \frac{3a^2 - b^2}{4})$, 则 $f(\lambda)$ 在 $(0, f'(\lambda) > 0 (\lambda < \frac{3a^2 - b^2}{4}))$ 上单调递增, 在 $(f'(\lambda) > 0 (\lambda < \frac{3a^2 - b^2}{4}), +\infty)$ 上单调递减.

.....6 分

(1) 当 $\frac{3a^2 - b^2}{4} \geq a^2 - b^2$, 即 $a^2 \leq 3b^2$ 时, 则 $f(\lambda)$ 在 $\lambda = a^2 - b^2$ 时取最大值 $f(a^2 - b^2) = a^6 b^2$.
注意到 $f(0) = b^6 a^2$, 则

$$f(\lambda) \in (b^6 a^2, a^6 b^2] (\lambda \in (0, a^2 - b^2])$$

则

$$\frac{|ST|}{|AB|} \in (\frac{b}{a}, \frac{a}{b}]$$

(2) 当 $\frac{3a^2 - b^2}{4} < a^2 - b^2$, 即 $a^2 > 3b^2$ 时, 则 $f(\lambda)$ 在 $\lambda = \frac{3a^2 - b^2}{4}$ 时取最大值 $f(\frac{3a^2 - b^2}{4}) = \frac{27}{256}(a^2 + b^2)^4$. 由 $f(a^2 - b^2) > f(0)$, 则

$$f(\lambda) \in [\frac{27}{256}(a^2 + b^2)^4, a^6 b^2] (\lambda \in (0, \frac{27}{256}(a^2 + b^2)^4])$$

则

$$\frac{|ST|}{|AB|} \in [\frac{16\sqrt{3}a^2b^2}{9(a^2 + b^2)^2}, \frac{a}{b}]$$

综上所述,

$$\frac{|ST|}{|AB|} \in \begin{cases} [\frac{b}{a}, \frac{a}{b}] & a^2 \leq 3b^2 \\ [\frac{16\sqrt{3}a^2b^2}{9(a^2 + b^2)^2}, \frac{a}{b}] & a^2 > 3b^2 \end{cases}$$

.....7 分

(3) 当 $AB \perp x$ 轴时, 面积为 ab . 不然, AB 斜率存在, 由 (2) 的运算过程可得

$$|ST| = \frac{2a^2b^2(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(b^2k^2 + a^2)\sqrt{a^2k^2 + b^2}}$$

在 (2) 我们还求得了 AB, l 的交点 A, B 满足的方程:

$$(1 + k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - a^2 - b^2 = 0$$

由中心对称性, 不妨设 A 的根小于 B 的根, 设为 x_A , 则有:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{-2km - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(k^2 + 1) - m^2}}{2(1 + k^2)} \\ &= -\frac{k\sqrt{a^2k^2 + b^2} + \sqrt{b^2k^2 - a^2}}{1 + k^2} \end{aligned}$$

类似地, 设 AB 与 l 的切点 S 的横坐标为 x_0 可得

$$x_0 = -\frac{a^2k}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}$$

.....8 分

则

$$\begin{aligned}
 |AS| &= \sqrt{1+k^2}(x_0 - x_A) \\
 &= \frac{k\sqrt{a^2k^2+b^2} + \sqrt{b^2k^2+a^2}}{1-k^2} - \frac{a^2k}{\sqrt{b^2-a^2k^2}} \\
 &= \frac{(km + \sqrt{b^2k^2+a^2})\sqrt{b^2-a^2k^2} - a^2k(1+k^2)}{\sqrt{b^2-a^2k^2}\sqrt{1-k^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{b^2+a^2k^2}km + \sqrt{(b^2k^2+a^2)(a^2k^2+b^2)} - a^2k(1+k^2)}{\sqrt{b^2+a^2k^2}\sqrt{1+k^2}} \\
 &= \frac{(b^2-a^2k^2)k + \sqrt{(b^2k^2+a^2)(a^2k^2+b^2)} - a^2k(1+k^2)}{\sqrt{b^2+a^2k^2}\sqrt{1+k^2}} \\
 &= \frac{(b^2-a^2)k + \sqrt{(b^2k^2+a^2)(a^2k^2-b^2)}}{\sqrt{b^2-a^2k^2}\sqrt{1+k^2}}
 \end{aligned}$$

.....9 分

则

$$\begin{aligned}
 \triangle AST \text{ 的面积} &= \frac{1}{2}|AS||ST| = \frac{(b^2-a^2)k + \sqrt{(b^2k^2+a^2)(a^2k^2+b^2)}}{\sqrt{b^2-a^2k^2}\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{a^2b^2(k^2+1)^{\frac{3}{2}}}{(b^2k^2-a^2)\sqrt{a^2k^2+b^2}} \\
 &= \frac{a^2b^2(k^2+1)[(b^2-a^2)k + \sqrt{(b^2k^2+a^2)(a^2k^2+b^2)}]}{(b^2k^2-a^2)(a^2k^2+b^2)} \\
 &= \frac{a^2b^2(k^2+1)(b^2-a^2)k}{(b^2k^2-a^2)(a^2k^2+b^2)} + \frac{a^2b^2(k^2+1)}{\sqrt{(b^2k^2+a^2)(a^2k^2+b^2)}} \\
 &= \frac{a^2b^2(k + \frac{1}{k})(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)(k + \frac{1}{k})^2 + (a^2-b^2)^2} + \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2b^2 + \left(\frac{a^2-b^2}{k + \frac{1}{k}}\right)^2}} \\
 &\stackrel{\mu = \frac{b^2-a^2}{k + \frac{1}{k}}}{=} \frac{a^2b^2\mu}{a^2b^2 + \mu^2} + \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2}}
 \end{aligned}$$

.....10 分

其中 $\mu = \frac{b^2-a^2}{k + \frac{1}{k}} \in (0, \frac{a^2-b^2}{2}]$, 则令 $g(\mu) = \frac{a^2b^2\mu}{a^2b^2 + \mu^2} + \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2}}$, 则

$$g'(\mu) = \frac{a^2b^2(ab - \sqrt{3}\mu)(ab + \sqrt{3}\mu)}{(a^2b^2 - \mu^2)^2(a^2b^2 - \mu^2 + \mu\sqrt{a^2b^2 + \mu^2})}$$

$g'(\mu) > 0 (0 < \mu < \frac{\sqrt{3}ab}{3})$, $g'(\mu) < 0 (\mu > \frac{\sqrt{3}ab}{3})$, 则 $g(\mu)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{3}ab}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\sqrt{3}ab}{3}, +\infty)$ 上单调递减。

.....

则有:

① 当 $\frac{\sqrt{3}ab}{3} \geq \frac{a^2-b^2}{2}$ 时, $g(\mu)$ 单调递增于 $(0, \frac{a^2-b^2}{2})$, 则 $g(\mu)$ 取最大值于 $g(\frac{a^2-b^2}{2}) = \frac{4a^4b^2}{(a^2-b^2)^2}$.

② 当 $\frac{\sqrt{3}ab}{3} < \frac{a^2-b^2}{2}$ 时, $g(\mu)$ 单调递增于 $(0, \frac{a^2-b^2}{2})$, 则 $g(\mu)$ 取最大值于 $g(0) = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

综上所述,

$$\triangle AST \text{ 的面积最大值} = \begin{cases} \frac{4a^4b^2}{(a^2-b^2)^2} & \frac{\sqrt{3}ab}{3} \geq \frac{a^2-b^2}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{4}ab & \frac{\sqrt{3}ab}{3} < \frac{a^2-b^2}{2} \end{cases}$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京,旗下拥有网站(网址:www.zizzs.com)和微信公众平台等媒体矩阵,用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长,在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南,请关注**自主选拔在线**官方微信号:**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线