鹰潭市 2023 届高三第二次模拟考试
数学答案(文科)参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	D	B	B	C	D	A	A	C	B

二、填空题

13. $\frac{2\pi}{3}$　　14. $x-y-2=0$　　15. $\frac{8\sqrt{15}\pi}{3}$

16. $T_n=\frac{2-(6n-1)\cdot(-2)^{n+1}}{18}$（或$\frac{1+(6n-1)\cdot(-2)^n}{9}$也给满分）

解：$a_n=2n-1, b_n=2^{n-1}$，令$c_n=(-1)^n\cdot a_nb_n=(-1)^n(2n-1)2^{n-1}=(-2)^n\cdot\frac{2n-1}{2}$

$\therefore T_n=\frac{1}{2}\cdot(-2)^1+\frac{3}{2}(-2)^2+\frac{5}{2}(-2)^3+\cdots+\frac{2n-3}{2}(-2)^{n-1}+\frac{2n-1}{2}\cdot(-2)^n$

$-2T_n=\frac{1}{2}\cdot(-2)^2+\frac{3}{2}(-2)^3+\frac{5}{2}(-2)^4+\cdots+\frac{2n-3}{2}(-2)^n+\frac{2n-1}{2}\cdot(-2)^{n+1}$

上面两个式子相减的：

$3T_n=\frac{1}{2}\cdot(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4+\cdots+(-2)^n-\frac{2n-1}{2}\cdot(-2)^{n+1}$

$=-1+\frac{4-(-2)^n\cdot(-2)}{1-(-2)}-\frac{2n-1}{2}\cdot(-2)^{n+1}$

$=\frac{1}{3}-\frac{6n-1}{6}(-2)^{n+1}$

$\therefore T_n=\frac{2-(6n-1)\cdot(-2)^{n+1}}{18}$

$=\frac{1+(6n-1)\cdot(-2)^n}{9}$

三、解答题

17. (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　(2) $\sin\angle DBC=\frac{\sqrt{17}}{17}$

解：（1）$\because a=\sqrt{17}$，$2b\sin A-\sqrt{17}\sin B=2b\cos A$，$\therefore 2b\sin A-a\sin B=2b\cos A$，

由正弦定理得$2\sin B\cdot\sin A-\sin A\cdot\sin B=2\sin B\cdot\cos A$又$\because \sin B>0$，$\therefore \sin A=2\cos A$，

$\therefore \tan A=2$. ……………………………………………3 分

A 为锐角，　$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………………………………5 分

(2) 设$AB=x$，在$\triangle ABD$中，$\angle ABD=90°, \tan A=\frac{BD}{AB}\therefore BD=2x$, D为AC的中点,$\therefore AD=DC=\sqrt{5}x$

在$\triangle ABC$中，　$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$　　即$(\sqrt{17})^2=x^2+(2\sqrt{5}x)^2-2\times x\times 2\sqrt{5}x\times\cos\angle BAC$

解得 $x=1$　　　所以　$AB=1$ …………………………………… 8 分

法一：由$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}$，得

$\frac{1}{2}\times x\times 2x=\frac{1}{2}\times 2x\times\sqrt{17}\times\sin\angle DBC$ ………………………… 10 分

. 解得$\sin\angle DBC=\frac{\sqrt{17}}{17}$ …………………………12 分

法二：在ΔBCD内，$BD=2,BC=\sqrt{17},CD=\sqrt{5}\therefore\cos\angle DBC=\frac{4\sqrt{17}}{17}$……………10分

$\sin\angle DBC=\frac{\sqrt{17}}{17}$…………………………………………………………………12分

18. （1）甲;（2）$x=\frac{105}{8}$时，商品的月销售额预报值最大，最大值为$\frac{11025}{16}$万元。

【详解】（1）根据数据知x,y负相关，排除乙. ………………………………… 2 分

$\bar{x}=\frac{4+5+6+7+8+9}{6}=6.5$，$\bar{y}=\frac{89+83+82+79+74+67}{6}=79$. ………………………………… 4 分

代入验证知，甲满足，丙不满足，故甲计算正确. ………………………………… 6 分

（2）根据题意： $z=x\hat{y}=-4x^2+105x$…………………………………………………………………8分

$=-4\left(x-\frac{105}{8}\right)^2+\frac{11025}{16}$

$\therefore$当$x=\frac{105}{8}$时z有最大值$\frac{11025}{16}$。 ……………………………………………………11分

故当$x=\frac{105}{8}$时，商品的月销售额预报值最大，最大值为$\frac{11025}{16}$ 万元。…………………… 12 分

19. (1) 见解析;(2) 点E到平面$ABCD$的距离为$\frac{5}{7}$.

（1）证明：因为二面角$S-AB-C$的大小为90°，则$SA\perp AD$，
又$SA\perp AB$，故$SA\perp$平面$ABCD$，又$BD\subset$平面$ABCD$，所以$SA\perp BD$；…………………… 2 分
在直角梯形$ABCD$中，$\angle BAD=\angle ADC=90^\circ$，$AD=2CD=1$，$AB=2$，

所以$\tan\angle ABD=\tan\angle CAD=\frac{1}{2}$，又$\angle DAC+\angle BAC=90^\circ$，

所以$\angle ABD+\angle BAC=90^\circ$，即$AC\perp BD$； ………………………… 4 分

又$AC\cap SA=A$，故$BD\perp$平面SAC， ………………………… 5 分

因为$AF\subset$平面SAC，故$BD\perp AF$ ………………………… 6 分

（2）设点E到平面$ABCD$的距离为h，因为$V_{B-AEC}=V_{E-ABC}$且$\frac{V_{E-ABC}}{V_{S-ABCD}}=\frac{4}{7}$ ……………… 8 分

故$\frac{V_{S-ABCD}}{V_{E-ABC}}=\frac{\frac{1}{3}S_{梯形ABCD}\cdot SA}{\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h}=\frac{\frac{\frac{5}{2}\times 1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 2\times 1\times h}=\frac{7}{4}$ ……………………10 分

$\therefore h=\frac{5}{7}$ ………………………… 11 分

所以E点到平面$ABCD$的距离为$\frac{5}{7}$ ……………………12 分

20.（1）由于 P_3，P_4 两点关于 y 轴对称，故由题设知 C 经过 P_3，P_4 两点.

又由 $\frac{2^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}>\frac{2^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{2})^2}{b^2}$ 知，C 不经过点 P_1，所以点 P_2 在 C 上.

因此 $\begin{cases}\frac{2^2}{b^2}=1,\\ \frac{2^2}{a^2}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=4.\end{cases}$

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.　　　　…………………………　4 分

（2）在 $\triangle ABP_2$ 中，$\angle AMP_2=2\angle ABP_2$，$\angle AMP_2=\angle ABP_2+\angle BP_2M$，

所以 $\angle ABP_2=\angle BP_2M$，从而 $|P_2M|=|BM|$，

又 M 为线段 AB 的中点，即 $|BM|=\frac{1}{2}|AB|$，所以 $|P_2M|=\frac{1}{2}|AB|$，

因此 $\angle AP_2B=90^\circ$，从而 $\overrightarrow{P_2A}\cdot\overrightarrow{P_2B}=0$，　　　　……………5 分

根据题意可知直线 l 的斜率一定存在，设它的方程为 $y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$ 消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-8=0$ ①，

$\Delta=(4km)^2-4(2m^2-8)(2k^2+1)>0$，

根据韦达定理可得 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{2k^2+1}$　　　　…………………………　7 分

所以 $\overrightarrow{P_2A}\cdot\overrightarrow{P_2B}=(x_1,y_1-2)\cdot(x_2,y_2-2)=(1+k^2)x_1x_2+k(m-2)(x_1+x_2)+(m-2)^2$

$=(1+k^2)\frac{2m^2-8}{2k^2+1}+k(m-2)\left(-\frac{4km}{2k^2+1}\right)+(m-2)^2$

所以 $(1+k^2)\frac{2m^2-8}{2k^2+1}+k(m-2)\left(-\frac{4km}{2k^2+1}\right)+(m-2)^2=0$，　　　　…………………………　9 分

整理得 $(m-2)(3m+2)=0$，解得 $m=2$ 或 $m=-\frac{2}{3}$

又直线 l 不经过点 $(0,2)$，所以 $m=2$ 舍去，

于是直线 l 的方程为 $y=kx-\frac{2}{3}$，恒过定点 $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$，　　　　……………11 分

该点在椭圆 C 内，满足关于 x 的方程①有两个不相等的解，

所以直线 l 恒过定点，定点坐标为 $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$　　　　……………12 分

21.（1）$f(x)$ 定义域为 $x\in(0,+\infty)$，且

$f'(x)=\frac{a}{x}+x-(a+1)=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$，

令 $f'(x)=0$ 得，$x=1$ 或 $x=a$，

①当 $0<a<1$ 时，$x\in(0,a)$ 与 $(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$x\in(a,1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

②当 $a=1$ 时，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

③当 $a>1$ 时，$x\in(0,1)$ 与 $(a,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$x\in(1,a)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，　　　　　　　　…………3 分

综上，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,a)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 在区间 $(a,1)$ 上单调递减；

当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 在区间 $(1,a)$ 单调递减；　……………4 分

（2）由已知，$g(x)=4x-a\ln x-\frac{1}{2}x^2$，则 $g'(x)=4-\frac{a}{x}-x=\frac{4x-a-x^2}{x}=-\frac{x^2-4x+a}{x}$，

函数 $g(x)$ 有两个极值点 x_1，$x_2\,(x_1<x_2)$，即 $x^2-4x+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根，

令 $h(x)=x^2-4x+a$，只需 $\begin{cases}h(0)=a>0\\h(2)=a-4<0\end{cases}$，故 $0<a<4$，　　　　……………5 分

又 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=a$，

所以 $g(x_1)+g(x_2)=\left(4x_1-a\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2\right)+\left(4x_2-a\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2\right)$

$=4(x_1+x_2)-a(\ln x_1+\ln x_2)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=a-a\ln a+8$，

要证 $g(x_1)+g(x_2)<10-\ln a$，即证 $a-a\ln a+8<10-\ln a$

只需证 $(1-a)\ln a+a-2<0$，　　　　　　　　…………… 7 分

令 $m(a)=(1-a)\ln a+a-2$，$a\in(0,4)$，

则 $m'(a)=-\ln a+\frac{1-a}{a}+1=\frac{1}{a}-\ln a$，

令 $n(a)=m'(a)$，则 $n'(a)=-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}<0$ 恒成立，

所以 $m'(a)$ 在 $a\in(0,4)$ 上单调递减，

又 $m'(1)=1>0$，$m'(2)=\frac{1}{2}-\ln 2<0$，

由零点存在性定理得，$\exists a_0\in(1,2)$ 使得 $m'(a_0)=0$，　　　　…………… 8 分

即 $\ln a_0=\frac{1}{a_0}$，

所以 $a\in(0,a_0)$ 时，$m'(a)>0$，$m(a)$ 单调递增，

$a\in(a_0,4)$ 时，$m'(a)<0$，$m(a)$ 单调递减，

则 $m(a)_{\max}=m(a_0)=(1-a_0)\ln a_0+a_0-2=(1-a_0)\dfrac{1}{a_0}+a_0-2=a_0+\dfrac{1}{a_0}-3$， …………… 10 分

$\because$ 由对勾函数知 $y=a_0+\dfrac{1}{a_0}-3$ 在 $a_0\in(1,2)$ 上单调递增，

$\therefore a_0+\dfrac{1}{a_0}-3<2+\dfrac{1}{2}-3=-\dfrac{1}{2}<0$，

$\therefore m(a)<0$，即 $g(x_1)+g(x_2)<10-\ln a$，得证 …………… 12 分

22. （1）点M的极坐标为：$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$或$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$， （2）$\sqrt{2}+1$

（1）设点 M 在极坐标系中的坐标$\left(\dfrac{3}{2},\theta\right)$，由$\rho=1+\sin\theta,\dfrac{3}{2}=1+\sin\theta,\therefore\sin\theta=\dfrac{1}{2}$……………1分

$\because 0\le\theta<2\pi\ \therefore\theta=\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$……………………………………………………………………3分

点M的极坐标为：$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$或$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right)$……………………………………………………………4分

（2）由题意可设 $M(\rho_1,\theta)$，$N\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$.

由$\rho=1+\sin\theta$得$\rho_1=1+\sin\theta$，$\rho_2=1+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\cos\theta$………………………………………6分

$|MN|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}=\sqrt{(1+\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2}$

$=\sqrt{3+2(\sin\theta+\cos\theta)}$

$=\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ ……………………………………………………………8分

故当$\theta=\dfrac{\pi}{4}$,$|MN|$的最大值为$\sqrt{2}+1$ …………… 10 分

22.【详解】（1）因为 $x+y=1$，且 $x>0,y>0$，由 $|x+2y|+|x-y|\le\dfrac{5}{2}$，

可得$\begin{cases}0<x<1\\|2-x|+|2x-1|\le\dfrac{5}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}0<x<1\\|2x-1|\le\dfrac{1}{2}+x\end{cases}$，即$\begin{cases}0<x<1\\-\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\le 2x-1\le\dfrac{1}{2}+x\end{cases}$，

解得$\dfrac{1}{6}\le x<1$，所以不等式的解集为$\left[\dfrac{1}{6},1\right)$. ………… 5 分

（2）因为 $x+y=1$，且 $x>0,y>0$，

所以$\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)\left(\dfrac{1}{y^2}-1\right)=\dfrac{(x+y)^2-x^2}{x^2}\cdot\dfrac{(x+y)^2-y^2}{y^2}=\dfrac{2xy+y^2}{x^2}\cdot\dfrac{2xy+x^2}{y^2}$ ………… 7 分

$=\left(\dfrac{2y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)\left(\dfrac{2x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}\right)=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}+5\ge 2\sqrt{\dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{2y}{x}}+5=9$……………………………………………………9分

当且仅当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立. ………… 10 分