



石景山区 2017 年高三统一练习

数 学（理）试 卷

考 生 须 知	1. 本试卷共 6 页，共三道大题，20 道小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟。 2. 在答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，选择题、作图题请用 2B 铅笔作答，其他试题请用黑色字迹签字笔作答，在试卷上作答无效。
------------------	--

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | 2x - 1 < 0\}$ ， $B = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ ，那么 $A \cap B$ 等于（ ）

- A. $\{x | x \geq 0\}$ B. $\{x | x \leq 1\}$
C. $\{x | 0 < x < \frac{1}{2}\}$ D. $\{x | 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$

2. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + y \leq 6, \\ x - y \leq 2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x + y$ 的最大值是（ ）

- A. 4 B. 6 C. 10 D. 12

3. 直线 $\rho \cos \theta = \frac{1}{2}$ 被圆 $\rho = 1$ 所截得的弦长为（ ）

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 4

4. 设 $\theta \in \mathbf{R}$ ，“ $\sin \theta = \cos \theta$ ”是“ $\cos 2\theta = 0$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件



5. 我国南宋数学家秦九韶（约公元 1202—1261 年）

给出了求 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 次多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

当 $x = x_0$ 时的值的一种简捷算法，该算法被后人命名为“秦九韶算法”。

例如，可将 3 次多项式改写为：

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0 \text{ 之后进行求值.}$$

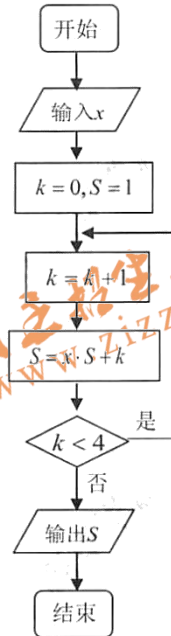
运行如图所示的程序框图，能求得多项式（ ）的值。

A. $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

B. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

C. $x^3 + x^2 + 2x + 3$

D. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$



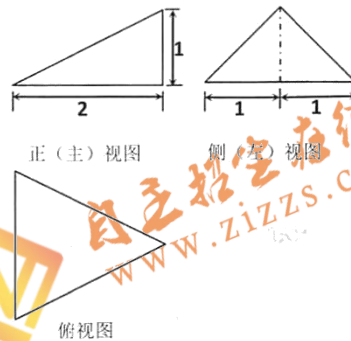
6. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的表面积是（ ）

A. $2 + \sqrt{5}$

B. $2 + 2\sqrt{5}$

C. $4 + \sqrt{5}$

D. 5



7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = 2$ ，

点 E 为 BC 的中点，点 F 在边 CD 上，若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \sqrt{2}$ ，

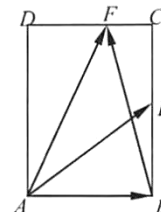
则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的值是（ ）

A. $2 - \sqrt{2}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

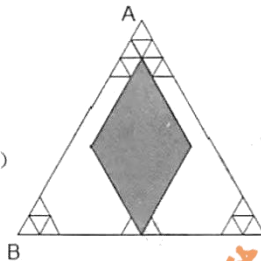




8. 如图，将正三角形 ABC 分割成 m 个边长为1的小正三角形和一个灰色菱形，这个灰色菱形可以分割成 n 个边长为1的小正三角形.

若 $m:n=47:25$ ，则三角形 ABC 的边长是 ()

- A. 10 B. 11
C. 12 D. 13



第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 若复数 $\frac{a+i}{1-i}$ 是纯虚数，则实数 $a =$ _____.

10. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_n \cdot a_{n+1} = -2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)，那么 a_8 等于 _____.

11. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的右顶点重合，则 $p =$ _____.

12. 如果将函数 $f(x) = \sin(3x + \varphi)$ ($-\pi < \varphi < 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位所得到的图象关于原点对称，那么 $\varphi =$ _____.

13. 将甲、乙、丙、丁四名同学分到三个不同的班，每个班至少分到一名同学，则不同的分法的总数是 _____。(用数字作答)

14. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2a - (x + \frac{4}{x}), & x < a, \\ x - \frac{4}{x}, & x \geq a. \end{cases}$

①当 $a = 1$ 时， $f(x) = 3$ ，则 $x =$ _____;

②当 $a \leq -1$ 时，若 $f(x) = 3$ 有三个不等实数根，且它们成等差数列，则 $a =$ _____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题共 13 分)

已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的三条对边，且 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ 。

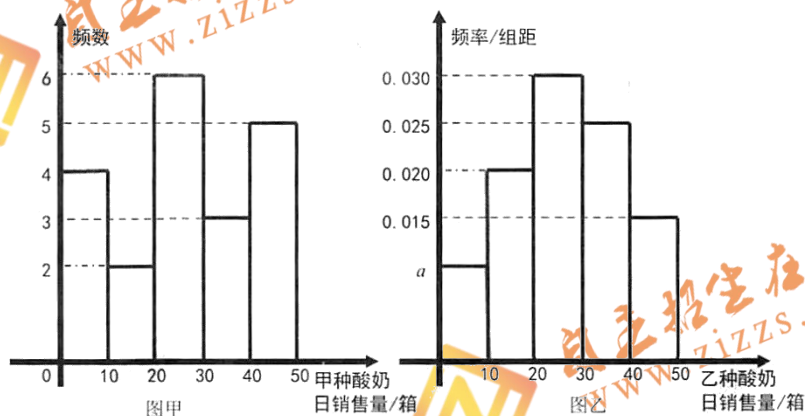
(I) 求角 C 的大小；

(II) 求 $\cos A + \cos B$ 的最大值。

16. (本小题共 13 分)

某超市从现有甲、乙两种酸奶的日销售量（单位：箱）的 1200 个数据（数据均在区间 $(0, 50]$ 内）中，按照 5% 的比例进行分层抽样，统计结果按 $(0, 10]$, $(10, 20]$, $(20, 30]$,

$(30, 40]$, $(40, 50]$ 分组，整理如下图：



(I) 写出频率分布直方图 (图乙) 中 a 的值；记所抽取样本中甲种酸奶与乙种酸奶日销售量的方差分别为 s_1^2 , s_2^2 ，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小 (只需写出结论)；

(II) 从甲种酸奶日销售量在区间 $(0, 20]$ 的数据样本中抽取 3 个，记在 $(0, 10]$ 内的数据个数为 X ，求 X 的分布列；

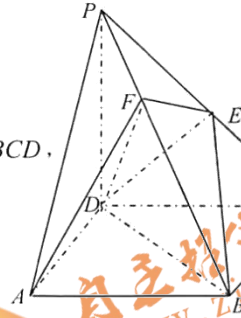
(III) 估计 1200 个日销售量数据中，数据在区间 $(0, 10]$ 中的个数。



17. (本小题共 14 分)

《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑(biē nǎo)。

如图，在阳马 $P-ABCD$ 中，侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，且 $PD=CD$ ， E 为 PC 中点，点 F 在 PB 上，且 $PB \perp$ 平面 DEF ，连接 BD ， BE 。



(I) 证明： $DE \perp$ 平面 PBC ；

(II) 试判断四面体 $DBEF$ 是否为鳖臑，

若是，写出其每个面的直角(只需写出结论)；若不是，说明理由；

(III) 已知 $AD=2, CD=\sqrt{2}$ ，求二面角 $F-AD-B$ 的余弦值。

18. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = \ln x$ 。

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(II) 求证：当 $x > 0$ 时， $f(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$ ；

(III) 若 $x-1 > a \ln x$ 对任意 $x > 1$ 恒成立，求实数 a 的最大值。

19. (本小题共 14 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(I) 求椭圆 E 的方程；

(II) 设直线 $l: y = \frac{1}{2}x + m$ 与椭圆 E 交于 A, C 两点，以 AC 为对角线作正方形 $ABCD$ ，记直线 l 与 x 轴的交点为 N ，问 B, N 两点间距离是否为定值？如果是，求出定值；如果不是，请说明理由。



20. (本小题共 13 分)

已知集合 $R_n = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\} (n \geq 2)$. 对于

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_n, B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R_n$, 定义 A 与 B 之间的距离为

$$d(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

(I) 写出 R_2 中的所有元素, 并求两元素间的距离的最大值;

(II) 若集合 M 满足: $M \subseteq R_3$, 且任意两元素间的距离均为 2, 求集合 M 中元素个数的最大值并写出此时的集合 M ;

(III) 设集合 $P \subseteq R_n$, P 中有 $m (m \geq 2)$ 个元素, 记 P 中所有两元素间的距离的平均值为 $\bar{d}(P)$, 证明 $\bar{d}(P) \leq \frac{mn}{2(m-1)}$.

石景山区 2017 年高三统一练习

数学（理）试卷答案及评分参考

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	A	A	B	C	C

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

题号	9	10	11	12	13	14
答案	1	-2	4	$-\frac{\pi}{4}$	36	$4, -\frac{11}{6}$

三、解答题共 6 小题，共 80 分。

15. (本小题共 13 分)

解：(I) 因为 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$,

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

又因为 $C \in (0, \pi)$,

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 由 (I) 知 $C = \frac{\pi}{3}$,

又 $A + B + C = \pi$,

$$\text{所以 } B = \frac{2\pi}{3} - A \text{ 且 } A \in (0, \frac{2\pi}{3}),$$

$$\text{故 } \cos A + \cos B = \cos A + \cos(\frac{2\pi}{3} - A) = \cos A + \cos \frac{2\pi}{3} \cos A + \sin \frac{2\pi}{3} \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A = \sin(\frac{\pi}{6} + A).$$

$$\text{又 } A \in (0, \frac{2\pi}{3}), \quad \frac{\pi}{6} + A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}),$$

$$\text{所以当 } \frac{\pi}{6} + A = \frac{\pi}{2} \text{ 即 } A = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } \cos A + \cos B \text{ 的最大值为 } 1. \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$



16. (本小题共 13 分)

解：(I) 由图 (乙) 知， $10(a + 0.02 + 0.03 + 0.025 + 0.015) = 1$ 解得 $a = 0.01$,

$$s_1^2 > s_2^2. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(II) X 的所有可能取值 1, 2, 3.

$$\text{则 } P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}, P(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}, P(X=3) = \frac{C_4^3 C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$$

其分布列如下：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(III) 由图 (甲) 知，甲种酸奶的数据共抽取 $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ 个，

其中有 4 个数据在区间 $(0, 10]$ 内.

又因为分层抽样共抽取了 $1200 \times 5\% = 60$ 个数据，

乙种酸奶的数据共抽取 $60 - 20 = 40$ 个，

由 (I) 知，乙种酸奶的日销售量数据在区间 $(0, 10]$ 内的频率为 0.1，

故乙种酸奶的日销售量数据在区间 $(0, 10]$ 内有 $40 \times 0.1 = 4$ 个.

故抽取的 60 个数据，共有 $4 + 4 = 8$ 个数据在区间 $(0, 10]$ 内.

所以，在 1200 个数据中，在区间 $(0, 10]$ 内的数据有 160 个.

$\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$



17. (本小题共 14 分)

(I) 因为 $PD \perp$ 面 $ABCD$, $BC \subset$ 面 $ABCD$,

所以 $BC \perp PD$.

因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 $BC \perp DC$.

$PD \cap DC = D$, 所以 $BC \perp$ 面 PDC .

$DE \subset$ 面 PDC , $DE \perp BC$,

在 $\triangle PDC$ 中, $PD = DC$, E 为 PC 中点 所以 $DE \perp PC$.

$PC \cap BC = C$,

所以 $DE \perp$ 面 PBC

4 分

(II) 四面体 $DBEF$ 是鳖臑, 其中 $\angle BED = \angle FED = \frac{\pi}{2}$,

$$\angle BFE = \angle BFD = \frac{\pi}{2}.$$

.....9 分

(III) 以 DA, DC, DP 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标

系. $D(0, 0, 0), A(2, 0, 0), C(0, \sqrt{2}, 0), P(0, 0, \sqrt{2}), B(2, \sqrt{2}, 0)$.

设 $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PB}$, 则 $F(2\lambda, \sqrt{2}\lambda, \sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda)$.

$DF \perp PB$ 得 $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ 解得 $\lambda = \frac{1}{4}$. 所以 $F(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4})$

11 分

设平面 FDA 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{DF} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{DA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y + \frac{3\sqrt{2}}{4}z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \quad \text{令 } z = 1 \text{ 得 } x = 0, y = -3.$$

平面 FDA 的法向量 $\vec{n} = (0, -3, 1)$,

平面 BDA 的法向量 $\overrightarrow{DP} = (0, 0, \sqrt{2})$,

$$\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{DP} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\vec{n}| |\overrightarrow{DP}|} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{10} \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

二面角 $F-AD-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

14 分



18. (本小题共 13 分)

解：(I) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(1) = 1$,

又 $f(1) = 0$, 所以切线方程为 $y = x - 1$;3 分

(II) 由题意知 $x > 0$, 令 $g(x) = f(x) - (1 - \frac{1}{x}) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$.

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$
5 分

令 $g'(x) = \frac{x-1}{x^2} = 0$, 解得 $x = 1$6 分

易知当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 易知当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$.

即 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增7 分

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 0$, $g(x) \geq g(1) = 0$

即 $g(x) = f(x) - (1 - \frac{1}{x}) \geq 0$, 即 $f(x) \geq (1 - \frac{1}{x})$8 分

(III) 设 $h(x) = x - 1 - a \ln x (x \geq 1)$, 依题意, 对于任意 $x > 1$, $h(x) > 0$ 恒成立.

$$h'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x},$$
9 分

$a \leq 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调增,

当 $x > 1$ 时, $h(x) > h(1) = 0$, 满足题意.11 分

$a > 1$ 时, 随 x 变化, $h'(x)$, $h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(1, a)$	a	$(a, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$h(x)$ 在 $(1, a)$ 上单调递减, 所以 $g(a) < g(1) = 0$

即当 $a > 1$ 时, 总存在 $g(a) < 0$, 不合题意.12 分

综上所述, 实数 a 的最大值为 1.13 分



19. (本小题共 14 分)

解：(I) 设椭圆的半焦距为 c .

因为点 $(0,1)$ 在椭圆 C 上, 所以 $b=1$.

$$\text{故 } a^2 - c^2 = 1.$$

$$\text{又因为 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } c = \sqrt{3}, a = 2.$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 设 $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 线段 AC 中点为 $M(x_0, y_0)$.

$$\text{联立 } y = \frac{1}{2}x + m \text{ 和 } x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \text{ 得: } x^2 + 2mx + 2m^2 - 2 = 0.$$

$$\text{由 } \Delta = (2m)^2 - 4(2m^2 - 2) = 8 - 4m^2 > 0, \text{ 可得 } -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -2m, \quad x_1 x_2 = 2m^2 - 2. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } AC \text{ 中点为 } M(-m, \frac{1}{2}m). \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{弦长 } |AC| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} = \sqrt{10 - 5m^2}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

又直线 l 与 x 轴的交点 $N(-2m, 0)$,

$$\text{所以 } |MN| = \sqrt{(-m + 2m)^2 + (\frac{1}{2}m)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}m^2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |BN|^2 = |BM|^2 + |MN|^2 = \frac{1}{4}|AC|^2 + |MN|^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{所以 } B、N \text{ 两点间距离为定值 } \frac{\sqrt{10}}{2}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$



20. (本小题共 13 分)

解: (I) $R_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$,

$$A, B \in R_2, d(A, B)_{\max} = 2. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(II) R_3 中含有 8 个元素, 可将其看成正方体的 8 个顶点, 已知集合 M 中的元素所对应的点, 应该两两位于该正方体面对角线的两个端点, 所以

$$M = \{(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$$

$$\text{或 } M = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\},$$

集合 M 中元素个数最大值为 4. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}

(III) $\bar{d}(P) = \frac{1}{C_m^2} \sum_{A, B \in P} d(A, B)$, 其中 $\sum_{A, B \in P} d(A, B)$ 表示 P 中所有两个元素间距离的总和.

设 P 中所有元素的第 i 个位置的数字中共有 t_i 个 1, $m - t_i$ 个 0, 则

$$\sum_{A, B \in P} d(A, B) = \sum_{i=1}^n t_i(m - t_i)$$

$$\text{由于 } t_i(m - t_i) \leq \frac{m^2}{4} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{所以 } \sum_{A, B \in P} d(A, B) = \sum_{i=1}^n t_i(m - t_i) \leq \frac{nm^2}{4}$$

$$\text{从而 } \bar{d}(P) = \frac{1}{C_m^2} \sum_{A, B \in P} d(A, B) \leq \frac{nm^2}{4C_m^2} = \frac{nm}{2(m-1)} \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$



自主招生
ZIZZS.COM



WWW.ZIZZS.COM

扫描二维码，关注自主招生官方微信！

查看更多自主招生相关资讯！



自主招生在线
WWW.ZIZZS.COM



自主招生在线
WWW.ZIZZS.COM