2021年秋季高三数学（理）开学摸底考试卷03

班级____________ 姓名____________ 分数____________

（考试时间：120分钟 试卷满分：150分）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

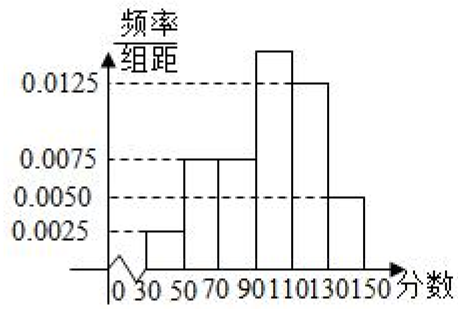
1．已知集合 $A=\{x\in N\mid 1\leqslant x\leqslant 9\}$，$B=\{x\mid 0<x<5\}$，则 $A\bigcap B=$

A．$\{2，3，4\}$　　B．$\{1，2，3，4\}$　　C．$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$　　D．$\{x\mid 1\leqslant x<5\}$

2．设复数 z 满足 $\dfrac{1+z}{1-z}=i$，则 $\overline{z}=$

A．i　　B．$-i$　　C．1　　D．$1+i$

3．2021年4月23日是第26个世界读书日，某市举行以“颂读百年路，展阅新征程”为主题的读书大赛活动，以庆祝中国共产党成立100周年．比赛分初赛和复赛两个阶段进行，规定：初赛成绩大于90分的具有复赛资格，某校有1000名学生参加了初赛，所有学生的成绩均在区间(30，150]内，其频率分布直方图如图所示，则该校获得复赛资格的人数为



A．650　　B．660　　C．680　　D．700

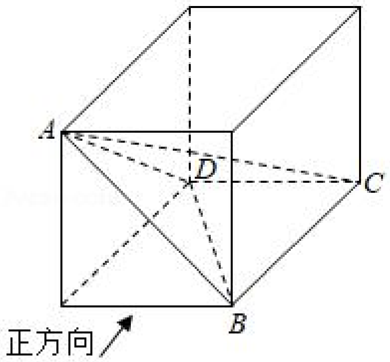
4．某新晋网红一线城市鹅城人口模型近似为 $P=250024e^{0.012t}$，其中 $t=0$ 表示2020年的人口数量，则鹅城人口数量达到320000的年份大约是（　　）$(ln2\approx 0.693$，$ln3\approx 1.099$，$ln5\approx 1.609)$

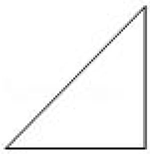
A．2040年　　B．2045年　　C．2030年　　D．2050年

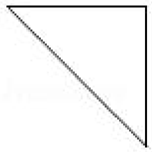
5．已知直线 $l: kx+y-\sqrt{2}k=0$ 与双曲线 $C: x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线平行，且这两条平行线间的距离为 $\dfrac{4}{3}$，则双曲线 C 的焦距为

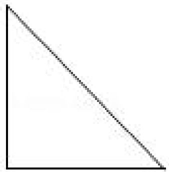
A．4　　B．6　　C．$2\sqrt{3}$　　D．8

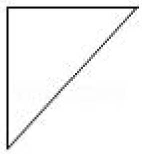
6．三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点为正方体的四个顶点，正方向如图所示，则三棱锥的左视图为



A. 

B. 

C. 

D. 

7. $\dfrac{1+\sin 70^{\circ}}{2-2\sin^{2}10^{\circ}}=$

A. 2　　B. -1　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

8. 设 $p:2x^{2}-3x+1\quad 0$，$q:x^{2}-(2a+1)x+a(a+1)\quad 0$，若 $\neg q$ 的必要不充分条件是 $\neg p$，则实数 a 的取值范围是

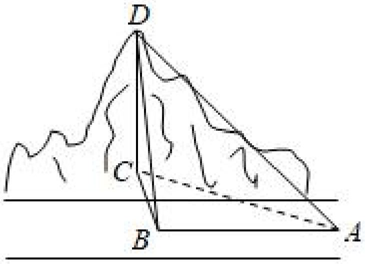
A. $[0,\dfrac{1}{2}]$

B. $(0,\dfrac{1}{2}]$

C. $(-\infty,0)\bigcup[\dfrac{1}{2},+\infty)$

D. $(-\infty,0)\bigcup(\dfrac{1}{2},+\infty)$

9. 如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 45°（即 $\angle BAC=45^{\circ})$ 的方向上，行驶 $600\sqrt{6}m$ 后到达 B 处，测得此山顶在北偏东 15°（即 $\angle ABC=75^{\circ})$ 的方向上，仰角 $\angle DBC$ 为 30°，则此山的高度 $CD=$



A. $200\sqrt{3}m$　　B. $400\sqrt{3}m$　　C. $600\sqrt{3}m$　　D. $800\sqrt{3}m$

10．把颜色分别为红、黄、蓝、白四种颜色的小球放入颜色分别为红、黄、蓝、白四种颜色的纸盒中，则四个小球都没有放入相同颜色的纸盒中的概率为

A．$\dfrac{16}{81}$　　B．$\dfrac{81}{256}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

11．已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，的各顶点都在球 O 的球面上，且 $AB=AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，若球 O 的体积为 $\dfrac{160\sqrt{5}}{3}\pi$，则这个直三棱柱的体积等于

A．$4\sqrt{2}$　　B．$8\sqrt{3}$　　C．8　　D．$4\sqrt{5}$

12．已知函数 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数．当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}-lnx,0<x\quad 1\\ 2f(x-1)+\dfrac{1}{2},x>1\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(x)-\sin\dfrac{\pi}{4}x$ 在 $[-\pi$，$\pi]$ 上的零点个数为(　　)

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．设函数 $f(x)=x^3+ax^2+(a+2)x$．若 $f(x)$ 的图象关于原点 $(0,0))$ 对称，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为____．

14．已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|$ 的最大值为____．

15．设 F_1，F_2 分别是椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 E 于 A，B 两点，$|AF_1|=3|BF_1|$，若 $\cos\angle AF_2B=\dfrac{3}{5}$，则椭圆 E 的离心率为____．

16．设函数 $f\left(x\right)=asin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}bsin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$（$a>0$），若∀$x$∈**R**，$|f$（$x$）$|\leqslant|f$（0）$|$，则 $\dfrac{1}{a}-2b$ 的最小值为 ____．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．（一）必考题：共 60 分．

17．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$．

（1）求证数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列；

（2）设 $b_n=a_na_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

18．某中学高三年级组为了解学生主动预习与学习兴趣是否有关，随机抽取一个容量为 n 的样本进行调查．调查结果表明，主动预习的学生占样本容量的 $\frac{13}{15}$，学习兴趣高的学生占样本容量的 $\frac{2}{3}$，主动预习且学习兴趣高的学生占样本容量的 $\frac{3}{5}$.

（1）完成下面 2×2 列联表．若有 97.5% 的把握认为主动预习与学习兴趣有关，求样本容量 n 的最小值；

	学习兴趣高	学习兴趣一般	合计
主动预习	$\frac{3}{5}n$		$\frac{13}{15}n$
不太主动预习			
合计	$\frac{2}{3}n$		n

（2）该校为了提高学生的数学学习兴趣，用分层抽样的方法从“学习兴趣一般”的学生中抽取 10 人，组成数学学习小组，现从该小组中随机抽取 3 人进行摸底测试，记 3 人中“不太主动预习”的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$．

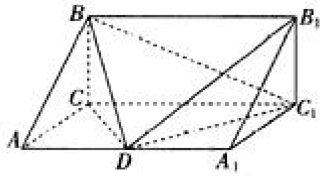
附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

$P(K^2\quad k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.076	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$B_1C_1\perp$ 平面 AA_1C_1C，D 是 AA_1 的中点，ΔACD 是边长为 1 的等边三角形．

（1）证明：$CD\perp B_1D$；

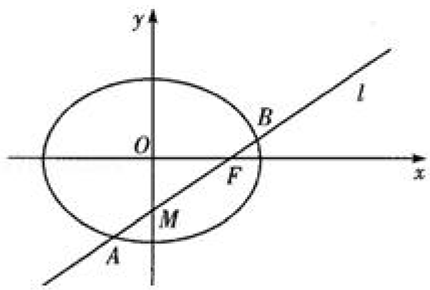
（2）若 $BC=\sqrt{3}$，求二面角 $B-C_1D-B_1$ 的大小．



20．如图，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，直线 l 经过椭圆 C 的右焦点 F，交椭圆于 A，B 两点．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程．

（Ⅱ）若直线 l 交 y 轴于点 M，且 $\overrightarrow{MA}=\lambda\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{MB}=\mu\overrightarrow{BF}$，当直线 l 的倾斜角变化时，$\lambda+\mu$ 是否为定值？若是，请求出 $\lambda+\mu$ 的值；否则，请说明理由．



21．已知 e 是自然对数的底数，函数 $f(x)=2e^{x-1}-ax^2$，其中 $a\in R$．

（1）当 $a=1$ 时，若 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 在 R 上恰有三个零点，求 a 的取值范围．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

22．在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=1+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），M 是 C_1 上的动点，动点 P 满足 $OP=3OM$．

（1）求动点 P 的轨迹 C_2 的参数方程；

（2）在以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，射线 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 与 C_1 异于极点的交点为 A，与 C_2 异于极点的交点为 B，求 AB．

23．已知关于 x 的不等式 $|x-4|+|x-m|\quad 2m$ 的解集为 R．

（1）求 m 的最大值；

（2）若 a ，b ，c 都是正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}=1$ ，求证：$a+2b+3c \quad 9$ ．