高三数学试卷参考答案

1. B　$A=(-\infty,3)$，$B=(-\infty,-1)$，则 $A\cap B=(-\infty,-1)$.

2. B　因为 $\mathrm{i}z=1-2\mathrm{i}$，所以 $z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=-2-\mathrm{i}$.

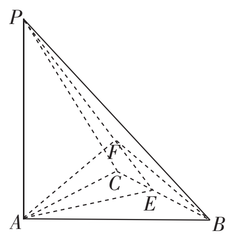
3. D　$f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=\cos x$，则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$.

4. D　由 $x^2=4y$，得 $p=2$，则 $|FN|=|FM|=2$，根据抛物线的定义，知 $|MF|=y_M+\dfrac{p}{2}=y_M+1=2$，解得 $y_M=1$，代入 $x^2=4y$，得 $x_M=\pm2$，所以 $\triangle FMN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$.

5. C　因为 $a=\log_5 3\in(\dfrac{1}{2},1)$，$b=0.2^{-0.3}>1$，$c=\log_{\frac{1}{6}}\dfrac{1}{2}=\log_6 2\in(0,\dfrac{1}{2})$，所以 $c<a<b$.

6. B　由题可知 $f'(x)=3ax^2+b$，所以 $f'(1)=3a+b=0$，$f(1)=a+b=4$，解得 $a=-2$，$b=6$，经检验，符合题意，所以 $a-b=-8$.

7. C　取 BC 的中点 E，连接 PE，过 A 作 $AF\perp PE$ 于 F，连接 BF. 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，E 为 BC 的中点，所以 $BC\perp AE$. 因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $BC\perp PA$，所以 $BC\perp$ 平面 PAE. 因为 $AF\subset$ 平面 PAE，所以 $BC\perp AF$. 又 $AF\perp PE$，$BC\cap PE=E$，所以 $AF\perp$ 平面 PBC，故 $\angle ABF$ 为 AB 与平面 PBC 所成角的平面角. 因为 $\triangle ABC$ 的边长为 8，所以 $AE=4\sqrt{3}$. 因为 $PA=14$，所以 $PB^2=PC^2=260$，所以 $PE=\sqrt{260-4^2}=2\sqrt{61}$，于是 $AF=\dfrac{PA\cdot AE}{PE}=\dfrac{28\sqrt{3}}{\sqrt{61}}$，所以 $\sin\angle ABF=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{61}}=\dfrac{7\sqrt{183}}{122}$.



8. C　①游泳场地安排 2 人，则不同的安排方法有 $C_3^2A_2^2=6$ 种，
②游泳场地只安排 1 人，则不同的安排方法有 $C_3^1C_3^2A_2^2=18$ 种，
所以不同的安排方法有 $6+18=24$ 种.

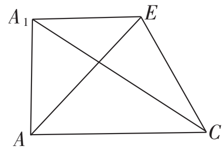
9. ABD　设产品升级前的营收为 a，升级后的营收为 $2a$.
对于产品 A，产品升级前的营收为 $0.1a$，升级后的营收为 $2a\times0.2=0.4a$，故升级后的产品 A 的营收是升级前的 4 倍，A 正确. 同理可得 B 正确，C 错误. 产品升级后，产品 B，D 营收的总和占总营收的比例不变，D 正确.

10. BD　由已知得圆 C_1 的圆心 $C_1(0,0)$，半径 $r_1=3$，圆 C_2 的圆心 $C_2(3,4)$，半径 $r_2=4$，$|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$，$r_2-r_1<d<r_1+r_2$，故两圆相交，所以 C_1 与 C_2 的公切线恰有 2 条，C_1 与 C_2 相交弦的方程为 $3x+4y-9=0$，C_1 到相交弦的距离为 $\dfrac{9}{5}$，故相交弦的弦长为 $2\sqrt{9-(\dfrac{9}{5})^2}=\dfrac{24}{5}$. 若 P,Q 分别是圆 C_1，C_2 上的动点，则 $|PQ|_{\max}=|C_1C_2|+r_1+r_2=12$.

11. AD　令 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}+\mathrm{e}x$，则 $g(x)=f(x)-2$，因为 $g(x)+g(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}+\mathrm{e}x+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$

$-\mathrm{e}x=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}+\frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=0$,所以 $g(x)$ 为奇函数. 又因为 $g(x)=1-\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}+\mathrm{e}x$,所以 $g(x)$ 为增函数. 因为 $f(m^2)+f(m-2)>4$,所以 $f(m^2)-2+f(m-2)-2>0$,等价于 $g(m^2)+g(m-2)>0$. 因为 $g(m^2)>-g(m-2)=g(2-m)$,所以 $m^2>2-m$,即 $m^2+m-2>0$,解得 $m<-2$ 或 $m>1$,所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

12. BCD 若 $A_1M\perp AB_1$,则 A_1M 在平面 ABB_1A_1 上的投影在 A_1B 上,所以 M 的轨迹为 A_1C,AM 的最小值为 A 到 A_1C 的距离,故 AM 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,故 A 错误;因为 E,F 分别为 AB_1 和 BC 的中点,所以 $EF\parallel A_1C$,所以三棱锥 $A-EFM$ 的体积为定值,故 B 正确;当且仅当 M 为 A_1C 的中点时,$EM\parallel$ 平面 $ABCD$,故 C 正确;将平面 EA_1C 翻折到与平面 AA_1C 重合,如图,$\cos\angle EA_1C=\frac{A_1E^2+A_1C^2-EC^2}{2A_1E\cdot A_1C}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,$\sin\angle AA_1C=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\sin\angle AA_1C=\cos\angle EA_1C$,所以 $\angle AA_1E=\frac{\pi}{2}$,$AE=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $AM+EM$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,故 D 正确.



13. -2 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times(-1)+(-2)\times 0=-2$.

14. $\frac{3}{4}$ $\tan\angle FAD=\tan(\angle FAB-\angle DAC)=\frac{\tan\angle FAB-\tan\angle DAC}{1+\tan\angle FAB\cdot\tan\angle DAC}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$.

15. $(2,\frac{1}{2})$;$\frac{\sqrt{6}}{2}$ 由题可知 AB 的垂直平分线的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-3)$,将 $y=-\frac{1}{2}(x-3)$ 与 $4x-2y-7=0$ 联立可得 $\begin{cases}x=2,\\ y=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 AB 的中点坐标为 $(2,\frac{1}{2})$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=0,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0,\end{cases}$ 两式作差可得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,

即 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2}{a^2}$,所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$,则双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

16. 10 因为 $f(x)=\frac{1}{x}$,所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$,所以 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\frac{1}{x_n}}{-\frac{1}{x_n^2}}=2x_n$,

所以 $\{x_n\}$ 是首项为 1,公比为 2 的等比数列. 因为 $x_1=1$,所以 $x_n=2^{n-1}$,所以 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$. 由 $S_n\leqslant 2023$,得 $2^n\leqslant 2024$,所以 $n\leqslant 10$,所以满足 $S_n\leqslant 2023$ 的最大正整数 n 的值为 10.

17. 解:(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由 $a_1+a_5=18$,可得 $a_3=9$.

因为 $a_6=15$,所以 $3d=a_6-a_3=15-9=6$,所以 $d=2$. ………………………………… 2 分

因为 $a_3=a_1+2d=9$，所以 $a_1=5$，…… 4 分

故 $a_n=2n+3$. …… 5 分

(2)因为 $a_n=2n+3$，所以 $\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$，…… 8 分

所以 $S_n=\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3})=\frac{n}{6n+9}$. …… 10 分

18. 解：(1)因为 $\sqrt{2}\cos A(b\cos C+c\cos B)=a$，

所以 $\sqrt{2}\cos A(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=\sin A$. …… 2 分

因为 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin A$，且 $\sin A\neq 0$，…… 4 分

所以 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …… 5 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$. …… 6 分

(2)因为△ABC 的面积为 $\sqrt{2}-1$，$A=\frac{\pi}{4}$，

所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-1$，得 $bc=4-2\sqrt{2}$. …… 8 分

因为 $a=\sqrt{5}$，$A=\frac{\pi}{4}$，

所以 $a^2=5=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-(2+\sqrt{2})bc=(b+c)^2-4$，…… 10 分

解得 $b+c=3$，

故△ABC 的周长为 $3+\sqrt{5}$. …… 12 分

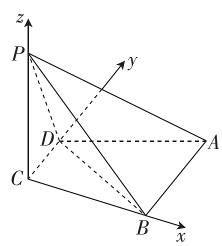
19. (1)证明：因为 $\angle BDC=60°$，$BD=2CD=2$，所以由余弦定理可得 $BC=\sqrt{3}$，…… 1 分

所以 $BD^2=CD^2+BC^2$，则 $BC\perp CD$. …… 2 分

因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，且相交于 CD，所以 $BC\perp$ 平面 PCD. …… 4 分

因为 $PD\subset$ 平面 PCD，所以 $BC\perp PD$. …… 5 分

(2)解：如图，以 CB，CD，CP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(\sqrt{3},2,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，…… 6 分



易得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，…… 8 分

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ -y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

取 $y=\sqrt{3}$，得 $x=-1$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{m}=(-1,\sqrt{3},1)$，…… 10 分

所以 $|\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以二面角 $A-PD-C$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………………… 12 分

20. 解：(1) 根据获得的利润统计数据表，

可得 $\bar{x}=6.5$，$\bar{y}=4$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=37.5$，…………………………………………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{30}{37.5}=0.8$，…………………………………………………… 3 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4-0.8\times6.5=-1.2$，…………………………………………………… 4 分

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.8x-1.2$. …………………………………………… 5 分

(2) 由题可知，“优秀投资额”有 2 个，“良好投资额”有 1 个，“不合格投资额”有 3 个. ………
…………………………………………………………………………………………… 6 分

X 的可能取值为 4，3，2，1，0，

$P(X=4)=\dfrac{C_2^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$，$P(X=3)=\dfrac{C_2^1C_1^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{15}$，$P(X=2)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{2}{5}$，$P(X=1)=\dfrac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^2}{C_6^2}=\dfrac{1}{5}$. ……………………………………………………………… 9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

…………………………………………………………………………………………… 10 分

数学期望 $EX=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{2}{5}+3\times\dfrac{2}{15}+4\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{5}{3}$. ……………………… 12 分

21. 解：(1) 由已知可得 $F_1(-2,0)$ 为 C 的左焦点，…………………………………………… 1 分

所以 $2a=|PF_1|+|PF|=4\sqrt{2}$，即 $a=2\sqrt{2}$，………………………………………………… 3 分

所以 $b^2=a^2-c^2=4$，…………………………………………………………………… 4 分

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. …………………………………………………… 5 分

(2) 设直线 AB 的方程为 $x=my+2$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由 $\begin{cases}x=my+2,\\x^2+2y^2=8,\end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+4my-4=0$，

显然 $\Delta=(4m)^2+16(m^2+2)>0$，于是 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{4}{m^2+2}$，…………… 7 分

因为 $\dfrac{|FM|}{|FN|}=\dfrac{|x_M-2|}{|x_N-2|}=\dfrac{2}{2}=1$，所以 $|FM|=|FN|$， ……………………………… 9 分

所以$\frac{\sqrt{S_2S_4}}{S_1+S_3}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}|FB||FN|\sin\angle BFN\cdot\frac{1}{2}|FA||FM|\sin\angle AFM}}{\frac{1}{2}|FB||FM|\sin\angle MFB+\frac{1}{2}|FA||FN|\sin\angle AFN}=\frac{\sqrt{|FB||FA|}}{|FB|+|FA|}$

$=\sqrt{\frac{|y_1y_2|}{(|y_1|+|y_2|)^2}}=\sqrt{\frac{|y_1y_2|}{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}}=\sqrt{\frac{4(m^2+2)}{16m^2+16(m^2+2)}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, …………… 11 分

解得 $m^2=1$,即 $m=\pm1$,所以直线 l_1 的方程为 $x\pm y-2=0$. ……………………………… 12 分

22.(1)解:$f'(x)=(x+1)e^{x-a}-\frac{1}{x}$, ……………………………………………………………… 1 分

因为切线 l 与直线 $x+y+1=0$ 垂直,所以 $f'(1)=2e^{1-a}-1=1$,即 $a=1$. ……………… 3 分

又 $f(1)=1$,所以切线 l 的方程为 $y=x$. ………………………………………………………… 5 分

(2)证明:$f'(x)=(x+1)e^{x-a}-\frac{1}{x}=(x+1)[e^{x-a}-\frac{1}{x(x+1)}]$,

设 $h(x)=e^{x-a}-\frac{1}{x(x+1)}$,则 $h'(x)=e^{x-a}+\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}>0$,即 $h(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

因为 $0<a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,所以 $h(a)=1-\frac{1}{a(a+1)}=\frac{a^2+a-1}{a(a+1)}<0$,$h(1)=e^{1-a}-\frac{1}{2}>0$,所以存在

$x_0\in(a,1)$,使得 $h(x_0)=e^{x_0-a}-\frac{1}{x_0(x_0+1)}=0$, ………………………………………… 7 分

当 $x\in(0,x_0)$时,$h(x)<0$,则 $f'(x)<0$,即 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,

当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$h(x)>0$,则 $f'(x)>0$,即 $f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增,

故 $x=x_0$ 是函数 $f(x)=xe^{x-a}-\ln x-\ln a(a>0)$的极小值点,也是最小值点,

则 $f(x)\geqslant f(x_0)=x_0e^{x_0-a}-\ln x_0-\ln a$. ………………………………………………… 8 分

又因为 $e^{x_0-a}=\frac{1}{x_0(x_0+1)}$,所以 $f(x_0)=\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0-\ln a$,

要证 $f(x)>\frac{a}{a+1}$,只需证$\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0-\ln a>\frac{a}{a+1}$,

即证$\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0>\frac{a}{a+1}+\ln a$. ………………………………………………………… 10 分

设 $g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln x$,则 $g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递减,

因为 $x_0\in(a,1)$,所以 $x_0<\frac{1}{a}$,则 $g(x_0)>g(\frac{1}{a})$,

故$\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0>\frac{1}{\frac{1}{a}+1}-\ln\frac{1}{a}$,$\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0>\frac{a}{a+1}+\ln a$.

故当 $0<a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时,$f(x)>\frac{a}{a+1}$. ………………………………………………………… 12 分