2023届高三年级12月份大联考

数学参考答案及评分细则

一、单选题

1. B 【解析】由题意，$A=\{x|x^2+x-2=0\}=\{-2,1\}$，$B=\{1,2\}$，所以$A\cup B=\{-2,1,2\}$，所以$\complement_U(A\cup B)=\{-1,0\}$. 故选B.

2. C 【解析】$\because f(x)=\begin{cases}2^x, x\leqslant 0,\\ x-\ln x, x>0,\end{cases}$ $\therefore f(0)=2^0=1$，$f(1)=1-\ln 1=1$，$f(0)+f(1)=2$. 故选C.

3. C 【解析】$z=\dfrac{-2+ai}{2+i}=\dfrac{(-2+ai)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{-4+a+(2+2a)i}{5}$，由题得$a-4=0$，且$2+2a\neq 0$，得$a=4$. 故选C.

4. D 【解析】由已知得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$-\cos\theta+3\sin\theta=0$，所以$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$. 则$\cos 2\theta+\sin 2\theta=2\cos^2\theta-1+2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}-1=2\times\dfrac{1+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}-1=\dfrac{7}{5}$. 故选D.

5. B 【解析】由分割过程可知：$BC\perp$平面CC_1D_1，$\because V_{B-CC_1D_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle CC_1D_1}\cdot BC=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times CC_1\times 4\times 3=4$，$\therefore CC_1=2$，阳马$D_1-ABCD$的外接球的一条直径为长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体对角线，即$D_1B=\sqrt{29}$，阳马$D_1-ABCD$的外接球的表面积为$29\pi$. 故选B.

6. B 【解析】C站第三位，只剩余5个位置，把D、E捆绑，看做一个元素，D、E占据第一、二位置，不同的排列方式有$2\times2\times2=8$种；D、E占据第四、五位置，不同的排列方式有$2\times2=4$种；D、E占据第五、六位置，不同的排列方式有$2\times2\times2=8$种. 所以不同的排列方式有$8+4+8=20$种. 故选B.

7. A 【解析】由$f(1-x)=f(1+x)$可得，$f(-x)=f(2+x)$，又$f(-x)=-f(x)$，则$f(x+2)=-f(x)$，且$f(0)=0$，所以$f(x+4)=f(x+2+2)=-f(x+2)=f(x)$，所以$f(x)$的周期$T=4$，$a_1=f(1)=3$，$a_2=f(2)=f(0)=0$，$a_3=f(3)=f(-1)=-f(1)=-3$，$a_4=f(4)=f(0)=0$. 则$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$. 所以，$S_{2\,022}=a_{2\,021}+a_{2\,022}=a_1+a_2=3$. 故选A.

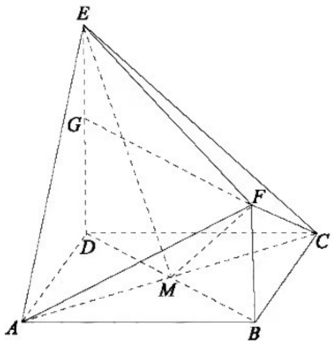
8. B 【解析】$y=\log_{0.3}x$是$(0,+\infty)$上的单调递减函数，故$\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$，$y=0.4^x$是$\mathbf{R}$上的单调递减函数，故$0.4^{0.5}<0.4^0=1$，$y=0.5^x$是$\mathbf{R}$上的单调减函数，$0.5^{0.4}<0.5^0=1$，故$c>a$，$c>b$；令$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x\in(0,1)$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$在$(0,1)$恒成立，故$f(x)$在$(0,1)$单调递增；则$\dfrac{\ln 0.4}{0.4}<\dfrac{\ln 0.5}{0.5}$，即$0.5\ln 0.4<0.4\ln 0.5$，故$0.4^{0.5}<0.5^{0.4}$，即$a<b$；综上所述，$a<b<c$. 故选B.

二、多选题

9. ACD 【解析】函数$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$$\left(|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(0)=-\sqrt{3}$，$2\sin\varphi=-\sqrt{3}$，又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，所以$f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，对于A，$f(x)$的最小正周期为$\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故A正确；对于B，

$\because \sin\left(2\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\neq\pm1$,故 B 错误;对于 C,当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$,$\therefore \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,$\therefore 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-2,\sqrt{3}\right]$,$\therefore f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的最小值为 -2,故 C 正确;对于 D,$\because f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$,$\therefore f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$ 对称,故 D 正确.故选 ACD.

10. ABC 【解析】因为 $ED\perp AD$,$ED\perp CD$,所以 $ED\perp$ 平面 $ABCD$,因为 $FB\perp AB$,$FB\perp BC$,所以 $FB\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $FB/\!/ED$,因为 $AB=ED=2FB=2$,则三棱锥 $F-ABC$ 的体积为 $V_1=\frac{1}{3}\cdot FB\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times2^2=\frac{2}{3}$,选项 A 正确;连接 FM,因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $BD\perp AC$,又 $ED\perp$ 平面 $ABCD$,$AC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $ED\perp AC$,又 $ED\cap BD=D$,$ED,BD\subset$ 平面 $BDEF$,则 $AC\perp$ 平面 $BDEF$,所以 $AC\perp EM$,又 $BM=DM=\frac{1}{2}BD=\sqrt{2}$,过 F 作 $FG\perp DE$ 于 G,易得四边形 $BDGF$ 为矩形,则 $FG=BD=2\sqrt{2}$,$EG=1$,则 $EM=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$,$FM=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$,$EF=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$,则 $EM^2+FM^2=EF^2$,所以 $EM\perp FM$,所以 $EM\perp$ 平面 AFC,故选项 B 正确,D 错误;$S_{\triangle EFM}=\frac{1}{2}EM\cdot FM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,$AC=2\sqrt{2}$,则三棱锥 $F-ACE$ 的体积 $V_2=V_{A-EFM}+V_{C-EFM}=\frac{1}{3}AC\cdot S_{\triangle EFM}=2$,选项 C 正确.故选 ABC.



11. AB 【解析】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2\pi,2\pi)$,$f(-x)=-x-\sin x+x\cos x=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是奇函数,A 正确;因为 $f(x)=x+\sin x-x\cos x$,所以 $f'(x)=1+\cos x-(\cos x-x\sin x)=1+x\sin x$,$f'(-x)=1+x\sin x$,所以 $f'(x)$ 为偶函数,B 正确;当 $x\in(0,\pi)$ 时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增,C 错误;$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1+\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2}=1-\frac{3\pi}{2}<0$,$f(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 上不单调递增,D 错误.故选 AB.

12. ACD 【解析】根据题意,由 $C:y^2=x$ 得 $F\left(\frac{1}{4},0\right)$,A 正确;又由 $PA/\!/x$ 轴,得 $A(x_1,1)$,代入 $C:y^2=x$ 得 $x_1=1$,则 $A(1,1)$,所以 $k_{AF}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$,故直线 AF 为 $y=\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)$,即 $4x-3y-1=0$,依题意知 AB 经过抛物线焦点 F,故联立 $\begin{cases}4x-3y-1=0\\ y^2=x\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{16}\\ y=-\frac{1}{4}\end{cases}$,即 $B\left(\frac{1}{16},-\frac{1}{4}\right)$,对于 B,因为 $y_1=1$,$y_2=-\frac{1}{4}$,故 $y_1y_2=-\frac{1}{4}$,故 B

错误；对于 C，易得 AO 的方程为 $y=x$，联立 $\begin{cases}y=x\\ x=-\frac{1}{4}\end{cases}$，故 $D\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$，所以 D，B 的纵坐标相同，则 $DB/\!/x$ 轴，故 C 正确；对于 D，由 $A(1,1)$，$B\left(\frac{1}{16},-\frac{1}{4}\right)$ 知 $|AB|=\frac{25}{16}$，故 D 正确．故选 ACD．

三、填空题

13．240　【解析】$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6=\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6+\frac{1}{x}\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$，$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^rC_6^r2^{6-r}x^{6-2r}$，$(r=0,1,2,3,4,5,6)$，所以展开式中含 x^2 项的系数为 $1\times C_6^2(-1)^2\times 2^4=240$．故答案为 240．

14．$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2\sqrt{5}-2}=1$（答案不唯一）．

15．$\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　【解析】M,A,P,B 四点在以 PM 为直径的圆上，设 $P(t,t-3)$，则过 M,A,P,B 的圆的方程为 $(x+1)(x-t)+y(y-t+3)=0$，由 $\begin{cases}(x+1)(x-t)+y(y-t+3)=0\\ (x+1)^2+y^2=2\end{cases}$ 得直线 AB 的方程为：$(t+1)x+(t-3)y+t-1=0$，则原点到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|t-1|}{\sqrt{(t+1)^2+(t-3)^2}}=\frac{|t-1|}{\sqrt{2t^2-4t+10}}=\frac{|t-1|}{\sqrt{2(t-1)^2+8}}$，当 $t=1$ 时，$d=0$，当 $t\neq1$ 时，$d=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{8}{(t-1)^2}}}<\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，原点到直线 AB 的距离的取值范围为 $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$．故答案为 $\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$．

16．$[-1,+\infty)$　【解析】$f'(x)=3x^2-1$，则 $y=f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线方程为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，整理得 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$，同 $y=x^2+a$ 联立，消 y 得 $x^2-(3x_1^2-1)x+a+2x_1^3=0$，由判别式 $\Delta=0$，整理得 $a=\frac{9}{4}x_1^4-2x_1^3-\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{4}$，令 $h(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}$，则 $h'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$，令 $h'(x)>0$，解得 $-\frac{1}{3}<x<0$ 或 $x>1$；令 $h'(x)<0$，解得 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $0<x<1$，则 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(\ \infty,\ \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\ \frac{1}{3},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$		0	+	0		0	+
$h(x)$	↘	$\frac{5}{27}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	1	↗

则 $h(x)$ 的值域为 $[-1,+\infty)$，故 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$．

四、解答题

17．解：若选①：

(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，设公差为 d，因为 $S_2=8$，$S_4=24$，

$\therefore\begin{cases}a_1+a_2=8\\ a_3+a_4=16\end{cases}$，　（2 分）

$\therefore\begin{cases}2a_1+d=8\\ 2a_1+5d=16\end{cases}$，　（3 分）

得 $\begin{cases}a_1=3\\ d=2\end{cases}$，　（4 分）

$\therefore a_n=2n+1$．　（5 分）

(2)由(1)得 $b_n=\frac{4}{a_n^2-1}=\frac{4}{(2n+1)^2-1}=\frac{4}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, (8 分)

所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-$

$\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. (10 分)

若选②:

(1)在等差数列$\{a_n\}$中,设公差为 d,

$\because \begin{cases} a_2=5 \\ a_3+a_5=18 \end{cases}$, (2 分)

$\therefore \begin{cases} a_1+d=5 \\ 2a_1+6d=18 \end{cases}$, (3 分)

得$\begin{cases} a_1=3 \\ d=2 \end{cases}$, (4 分)

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1$. (5 分)

(2)由(1)得 $b_n=\frac{4}{a_n^2-1}=\frac{4}{(2n+1)^2-1}=\frac{4}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, (8 分)

所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-$

$\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. (10 分)

若选③:

(1)在等差数列$\{a_n\}$中,设公差为 d,

$\because \begin{cases} a_1=3 \\ S_6=6a_1+\frac{6\times5}{2}d=48 \end{cases}$, (3 分)

得$\begin{cases} a_1=3 \\ d=2 \end{cases}$, (4 分)

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=3+2(n-1)=2n+1$. (5 分)

(2)由(1)得 $b_n=\frac{4}{a_n^2-1}=\frac{4}{(2n+1)^2-1}=\frac{4}{4n(n+1)}$

$=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, (8 分)

所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-$

$\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. (10 分)

18. 证明:(1)在$\triangle ABD$中,由正弦定理得$\frac{BA}{\sin\angle BDA}=$

$\frac{BD}{\sin\angle BAD}$, (1 分)

即$\frac{BA}{BD}=\frac{\sin\angle BDA}{\sin\angle BAD}$, (2 分)

因为 $\sin\angle BDA=\sin(\pi-\angle BDC)=\sin\angle BDC$,所

以$\frac{BA}{BD}=\frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle BAD}$, (4 分)

又由已知$\frac{BA}{BD}=2$,所以$\frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle BAD}=2$, (5 分)

即 $\sin\angle BDC=2\sin\angle BAC$. (6 分)

(2)设 $BD=x$,则 $BA=2x$,

在$\triangle BCD$中,由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-$

$2BC\cdot CD\cos\angle BCD$,

即 $x^2=2-2\cos\angle BCD$, (7 分)

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得 $AB^2=BC^2+AC^2-$

$2BC\cdot AC\cos\angle BCA$,

即 $4x^2=5-4\cos\angle BCA$, (8 分)

解得 $\cos\angle BCA=\frac{3}{4}$, (9 分)

$\therefore \sin\angle BCA=\sqrt{1-\cos^2\angle BCA}=\frac{\sqrt{7}}{4}$, (11 分)

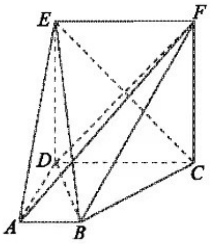
所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin\angle BCA=\frac{1}{2}\times1\times2\times$

$\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. (12 分)

19. 证明:(1)连接 BD,因为 $AB=1$,$AD=DE=2$,

因为 $AB/\!/CD$,$AD\perp CD$,所以 $AD\perp AB$,

由勾股定理得:$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{5}$, (1 分)



因为 $BE=3,DE=2$，

故 $BE^2=DE^2+BD^2$，所以 $BD\perp DE$，（2 分）

又 $CD\perp DE$，$CD\cap BD=D$，

所以 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，（3 分）

又 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $DE\perp AD$，

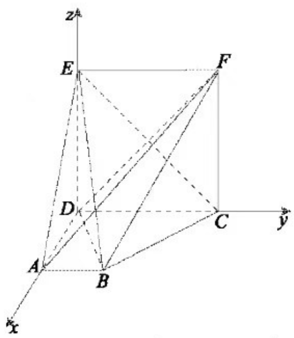
又 $AD\perp CD$，$ED\cap CD=D$，所以 $AD\perp$ 平面 $CDEF$，（4 分）

又 $CE\subset$ 平面 $CDEF$，所以 $AD\perp CE$，

又 $DF\perp CE$，$AD\cap DF=D$，所以 $CE\perp$ 平面 ADF，（5 分）

又 $CE\subset$ 平面 BCE，所以平面 $ADF\perp$ 平面 BCE.（6 分）

(2)由(1)知 DA,DC,DE 两两垂直，所以以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.（7 分）



$C(0,2,0)$，$E(0,0,2)$，$F(0,2,2)$，$B(2,1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{CB}=(2,-1,0)$，$\overrightarrow{CF}=(0,0,2)$，（8 分）

由 $CE\perp$ 平面 ADF 知 $\overrightarrow{CE}=(0,-2,2)$ 是平面 ADF 的一个法向量.（9 分）

设平面 BCF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$ 得：$\begin{cases}2x-y=0\\ 2z=0\end{cases}$，

解得：$z=0$，令 $x=1$，则 $y=2$，故 $\boldsymbol{n}=(1,2,0)$，（10 分）

设平面 ADF 与平面 BCF 所成的锐二面角为 θ，

即 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-4|}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，（11 分）

所以平面 ADF 与平面 BCF 所成的锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.（12 分）

20. (1) a_1,a_2,a_3,a_4 可能的排列结果如下：

$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,4,3\}$，$\{1,3,2,4\}$，$\{1,3,4,2\}$，$\{1,4,2,3\}$，$\{1,4,3,2\}$，

$\{2,1,3,4\}$，$\{2,1,4,3\}$，$\{2,3,1,4\}$，$\{2,3,4,1\}$，$\{2,4,1,3\}$，$\{2,4,3,1\}$，

$\{3,1,2,4\}$，$\{3,1,4,2\}$，$\{3,2,1,4\}$，$\{3,2,4,1\}$，$\{3,4,1,2\}$，$\{3,4,2,1\}$，

$\{4,1,2,3\}$，$\{4,1,3,2\}$，$\{4,2,1,3\}$，$\{4,2,3,1\}$，$\{4,3,1,2\}$，$\{4,3,2,1\}$，（2 分）

则 X 的可能取值集合为 $\{0,2,4,6,8\}$，（3 分）

$P(X=0)=\dfrac{1}{24}$，$P(X=2)=\dfrac{3}{24}=\dfrac{1}{8}$，$P(X=4)=\dfrac{7}{24}$，$P(X=6)=\dfrac{9}{24}=\dfrac{3}{8}$，$P(X=8)=\dfrac{4}{24}=\dfrac{1}{6}$，（6 分）

X 的分布列为：

X	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{6}$

（7 分）

(2)首先 $P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=2)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$，(8分)

则三轮测试都有 $X\leqslant 2$ 的概率为 $P=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$.

所以出现这种现象的概率为 $\frac{1}{216}$.　(12分)

21. **解**：(1)双曲线方程为：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

将 $A(2,-\sqrt{6})$，$B(3,4)$ 代入得：$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1\\ \frac{9}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1\end{cases}$，　(1分)

解得 $\begin{cases}a^2=1\\ b^2=2\end{cases}$，　(2分)

即双曲线 E：$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.　(4分)

(2)双曲线 E 的右顶点为 $C(1,0)$，

设直线 l：$y-1=k(x-1)$，即 $y=kx+1-k$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

易得 BC：$2x=y+2$.　(5分)

所以由 $\overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CM}\Rightarrow 2\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{CM}$，即点 P 是线段 MQ 的中点.　(6分)

所以 $P(x_1,2x_1-2)$，$Q(x_1,4x_1-4-y_1)$，于是 QN 的方程：$y-y_2=\frac{4x_1-4-y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)$，(7分)

下证直线 QN 过定点 $(1,0)$.

即证 $0-y_2=\frac{4x_1-4-y_1-y_2}{x_1-x_2}(1-x_2)$，即证 $y_2(x_2-x_1)=(1-x_2)(4x_1-4-y_1-y_2)$.

即证 $4(x_1+x_2)-4x_1x_2-4+y_1x_2+y_2x_1-(y_1+y_2)=0$.

$y_1=kx_1+1-k$，$y_2=kx_2+1-k$ 代入整理得 $4(x_1+x_2)-4x_1x_2-4+y_1x_2+y_2x_1-(y_1+y_2)=(5-2k)(x_1+x_2)+(2k-4)x_1x_2+2k-6$，　①　(9分)

由 $\begin{cases}y=kx+1-k\\ x^2-\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow(k^2-2)x^2+2k(1-k)x+(k^2-2k+3)=0$.

$\begin{cases}k^2-2\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Rightarrow k<\frac{3}{2}$ 且 $k\neq\pm\sqrt{2}$，

$\therefore x_1+x_2=\frac{2k(k-1)}{k^2-2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{k^2-2k+3}{k^2-2}$，　(10分)

代入①式：

$(5-2k)\cdot\frac{2k(k-1)}{k^2-2}+(2k-4)\frac{k^2-2k+3}{k^2-2}+2k-6=0$，

故直线 QN 过定点 $(1,0)$.　(12分)

22. **解**：(1)令 $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-x-a\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$.

$f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立等价于 $h(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $(h(x))_{\min}\geqslant 0$，　(1分)

$h'(x)=2x-1-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-x-a}{x}$，　(2分)

令 $m(x)=2x^2-x-a\ (a>0)$，$\Delta=1+8a>0$，

$m(x)=0$ 有两根 $x_1=\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4}$，

因为 $a>0$，$x_1<0$，$x_2>\frac{1}{2}$.　(3分)

$x\in(0,x_2)$ 时，$m(x)<0$，即 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

$x\in(x_2,+\infty)$ 时，$m(x)>0$，即 $h'(x)>0$，$h(x)$

单调递增.　(5 分)

因为 $h(1)=0$,所以 $h(x)\geqslant 0$ 等价于 $h(x)\geqslant h(1)$,$h(x)_{\min}=h(x_2)\geqslant 0$,

当 $a=1$ 时,$x_2=1$,故 $h(x)\geqslant h(1)=0$ 满足题意.

当 $a>1$ 时,$x_2>1$,当 $x\in(1,x_2)$ 时,故 $h(x)<h(1)=0$,不满足题意.

当 $0\leqslant a<1$ 时,$\frac{1}{2}<x_2<1$,当 $x\in(x_2,1)$ 时,$h(x)<h(1)=0$,不满足题意.

综上可知:只有 $a=1$ 符合,所以实数 a 的取值范围为 $a=1$.　(7 分)

(2)由(1)可知:$a=1$ 时,$h(x)\geqslant 0$,

即 $x^2-x\geqslant \ln x$,当且仅当 $x=1$ 时取等号,　(8 分)

故当 $x=\frac{n+1}{n}$ 时,可得 $\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-\frac{n+1}{n}>\ln\frac{n+1}{n}$,

$\frac{n+1}{n^2}>\ln\frac{n+1}{n}$,即 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}>\ln(n+1)-\ln n$,

(10 分)

故 $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$

$>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)$.　(11 分)

故 $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)>\ln(n+1)$.　(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。