2021 年全国统一高考数学试卷（甲卷）

理科数学

适用范围：四川、云南、贵州、广西、西藏

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。

2．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。

3．答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。

4．所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。

5．考试结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $M=\{x|0<x<4\}$，$N=\{x|\frac{1}{3}\le x\le 5\}$，则 $M\cap N=$

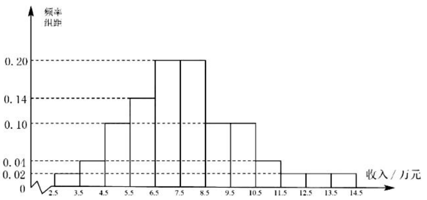
A．$\{x|0<x\le\frac{1}{3}\}$　　B．$\{x|\frac{1}{3}\le x<4\}$

C．$\{x|4\le x<5\}$　　D．$\{x|0<x\le 5\}$

【答案】B

【微信公众号：数学研讨 解析】由已知 $M\cap N=\{\frac{1}{3}\le x<4\}$，故选：B.

2．为了解某地农村经济情况，对该地农户家庭年收入进行抽样调查，将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图：



根据此频率分布直方图，下面结论中不正确的是

A．该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%

B．该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%

C．估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元

D．估计该地有一半以上的农户，其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间

【答案】C

【微信公众号：数学研讨 解析】对于答案 A：由频率分布直方图，有 $0.02+0.04=0.06=6\%$，故 A 正确；

对于答案 B：由频率分布直方图，有 $0.02\times 3+0.04=0.10=10\%$，故 B 正确；

对于答案 D：由频率分布直方图，有 $0.10+0.14+0.20\times 2=0.64=64\%$，故 D 正确；

故答案 C 错误。

3．已知 $(1-i)^2 z=3+2i$，则 $z=$

A．$-1-\frac{3}{2}i$　　B．$-1+\frac{3}{2}i$　　C．$-\frac{3}{2}+i$　　D．$-\frac{3}{2}-i$

【答案】B

【微信公众号：数学研讨 解析】由 $(1-i)^2 z=3+2i$，得 $z=\frac{3+2i}{(1-i)^2}=\frac{3+2i}{-2i}=-1+\frac{3i}{2}$，

故选 B。

4．青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量，通常用五分记录

法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$。已知某同学视力的五分记录法的数据为4.9，则其视力的小数记录法的数据约为（$\sqrt[10]{10}\approx 1.259$）

A．1.5　　B．1.2　　C．0.8　　D．0.6

【答案】A

【微信公众号：数学研讨 解析】将 $L=4.9$ 代入 $L=5+\lg V$ 得 $\lg V=-0.1=-\frac{1}{10}$，所以 $V=10^{-\frac{1}{10}}=\frac{1}{\sqrt[10]{10}}\approx\frac{1}{1.259}\approx 0.8$，故选C．

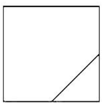
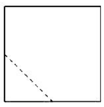
5．已知 F_1，F_2 是双曲线 C 的两个焦点，P 为 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=60°$，$|PF_1|=3|PF_2|$，则 C 的离心率为

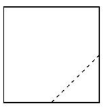
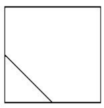
A．$\frac{\sqrt{7}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　C．$\sqrt{7}$　　D．$\sqrt{13}$

【答案】A

【微信公众号：数学研讨 解析】由 $|PF_1|=3|PF_2|$，$|PF_1|-|PF_2|=2a$ 得 $|PF_2|=a$，$|PF_1|=3a$，在 ΔF_1PF_2 中，有 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，得 $(2c)^2=(3a)^2+a^2-2\times 3a\times a\times\cos 60°$，即 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$。故选A。

6．在一个正方体中，过顶点 A 的三条棱的中点分别为 E,F,G．该正方体截去三棱锥 $A—EFG$ 后，所得多面体的三视图中，正视图如右图所示，则相应的侧视图是

A．　　B．

C．　　D．

【答案】D

7．等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n．设甲：$q>0$．乙：$\{S_n\}$ 是递增数列，则

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件

B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件

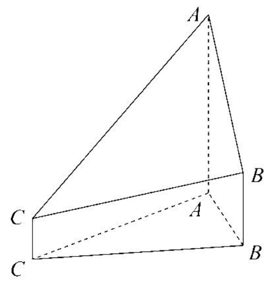
D．甲不是乙的充分条件也不是必要条件

【答案】A

【微信公众号：数学研讨 解析】$a_1=-1,q=2$ 时，$\{S_n\}$ 是递减数列，所以甲不是乙的充分条件；$\{S_n\}$ 是递增数列，可以推出 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n>0$，可以推出 $q>0$，甲是乙的必要条件．故选：A．

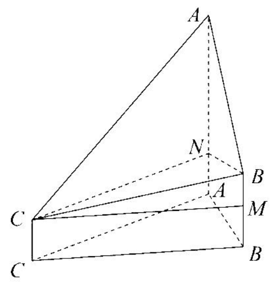
8．2020年12月8日，中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高度为8848.86（单位：m），三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一．右图是三角高程测量法的一个示意图，现有 A,B,C 三点，且 A,B,C 在同一水平面上的投影 A',B',C'，满足 $\angle A'C'B'=45°$，$\angle A'B'C'=60°$．由 C 点侧得 B 点的仰角为 $15°$，BB' 与 CC' 的差为100，由 B 点侧得 A 的仰角为 $45°$，则 A,C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 约为（$\sqrt{3}\approx 1.732$）

A．346　　　　B．373　　　　C．446　　　　D．473



【答案】B

【微信公众号：数学研讨 解析】过 C 作 BB' 的垂线交 BB' 于点 M，过 B 作 AA' 的垂线交 AA' 于点 N，设 $B'C'=CM=m$，$A'B'=BN=n$，在三角形 $\triangle A'B'C'$ 中，$\dfrac{m}{\sin 75^\circ}=\dfrac{n}{\sin 45^\circ}$，在三角形 $\triangle CBM$ 中，$\dfrac{m}{\sin 75^\circ}=\dfrac{100}{\sin 15^\circ}$，联立求得 $n=\dfrac{200}{\sqrt{3}-1}\approx 273$，得 A,C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差 $AA'-CC'$ 约为 273+100=373．故选：B．



9．若 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\tan 2\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，则 $\tan\alpha=$

A．$\dfrac{\sqrt{15}}{15}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

【答案】A

【微信公众号：数学研讨 解析】由 $\tan 2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}$，化解得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，从而得 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$．故选：A．

10．将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行，则 2 个 0 不相邻的概率为

A．$\dfrac{1}{3}$　　　　B．$\dfrac{2}{5}$　　　　C．$\dfrac{2}{3}$　　　　D．$\dfrac{4}{5}$

【答案】C

【微信公众号：数学研讨 解析】由将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行共有 C_6^2 种，先将 4 个 1 全排列，再将 2 个 0 用插空发共有 C_5^2 种，则题目所求的概率为 $P=\dfrac{C_5^2}{C_6^2}=\dfrac{2}{3}$．故选：C．

11．已知 A，B，C 是半径为 1 的球 O 的球面上的三个点，且 $AC\perp BC$，$AC=BC=1$，则三棱锥的体积为

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{12}$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　　　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】A

【微信公众号：数学研讨 解析】记 ΔABC 的外接圆圆心为 O_1，由 $AC\perp BC$，$AC=BC=1$，知 O_1 为 AB 的中点，且 $AB=\sqrt{2}$，$OC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又球的半径为 1，所

以 $OA=OB=OC=1$，所以 $OA^2+OB^2=AB^2$，$OO_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，于是

$OO_1^2+O_1C^2=OC^2$，所以有 $OO_1\perp O_1C$，$OO_1\perp AB$，进而 $OO_1\perp$ 平面 ABC，所以 $V_{O-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot OO_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 A.

12．设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$，若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f(\frac{9}{2})=$

A．$-\frac{9}{4}$　　B．$-\frac{3}{2}$　　C．$\frac{7}{4}$　　D．$\frac{5}{2}$

【答案】D

【微信公众号：数学研讨 解析】因为 $f(x+1)$ 为奇函数，所以 $f(1)=0$，即 $a+b=0$，

所以 $b=-a$，

又 $f(0)=f(-1+1)=-f(1+1)=-f(2)=-4a-b=-3a$，

$f(3)=f(1+2)=f(-1+2)=f(1)=0$，由 $f(0)+f(3)=6$，得 $a=-2$

所以 $f(\frac{9}{2})=f(2+\frac{5}{2})=f(2-\frac{5}{2})=f(-\frac{1}{2})=f(-\frac{3}{2}+1)$

$=-f(\frac{3}{2}+1)=-f(\frac{1}{2}+2)=-f(-\frac{1}{2}+2)=-f(\frac{3}{2})$

$=-\frac{9}{4}a-b=-\frac{5}{4}a=\frac{5}{2}$，故选 D.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．曲线 $y=\frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为________.

【答案】$5x-y+2=0$

【微信公众号：数学研讨 解析】由题 $y'=\frac{2(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$，所以在点 $(-1,-3)$ 处的切线的斜率 $k=5$，故切线方程为 $y+3=5(x+1)$，即 $5x-y+2=0$.

14．已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，则 $k=$________.

【答案】$k=-\frac{10}{3}$

【微信公众号：数学研讨 解析】$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(3,1)+k(1,0)=(k+3,1)$，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，所以 $3(k+3)+1=0$，解得 $k=-\frac{10}{3}$.

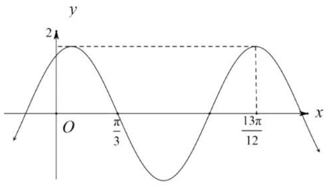
15．已知 F_1，F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P，Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，则四边形 PF_1QF_2 的面积为________.

【答案】8

【微信公众号：数学研讨 解析】由 $|PQ|=|F_1F_2|$，得 $|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，所以 $PF_1\perp PF_2$，

所以 $S_{PF_1QF_2}=2S_{\Delta PF_1F_2}=2\cdot b^2\tan\frac{\theta}{2}=8$.

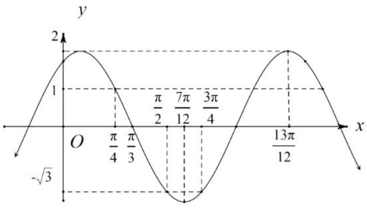
16．已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则满足条件 $(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(-\frac{4\pi}{3}))>0$ 的最小正整数 x 为________.



【答案】2

【微信公众号：数学研讨 解析】由$\frac{3T}{4}=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$，得$T=\pi$，$\omega=2$，将$(\frac{\pi}{3},0)$代入$y=2\cos(2x+\varphi)$得$\cos(\frac{2\pi}{3}+\varphi)=0$，$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以$f\left(x\right)=2\cos(2x-\frac{\pi}{6})$.

$(f(x)-f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x)-f(-\frac{4\pi}{3}))>0$等价于$(f\left(x\right)-1)(f\left(x\right)+\sqrt{3})>0$，等价于$f\left(x\right)<-\sqrt{3}$或$f\left(x\right)>1$，由图像得最小整数$x\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，所以$x=2$



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

甲、乙两台机床生产同种产品，产品按质量分为一级品和二级品，为了比较两台机床产品的质量，分别用两台机床各生产了 200 件产品，产品的质量情况统计如下表：

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

（1）甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少？

（2）能否有 99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异？

【答案】（1）略；（2）没有 99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.

【微信公众号：数学研讨 解析】（1）设甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别为P_1、P_2，则$P_1=\frac{150}{200}=0.75$，$P_2=\frac{120}{200}=0.6$；

（2）根据列联表中数据，可得K^2的观测值

$$k=\frac{400(150\times80-120\times50)^2}{200\times200\times270\times130}=\frac{400}{39}\approx10.256.$$

∵10.256<10.828，所以没有 99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.

18.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的各项为正数，记S_n为$\{a_n\}$的前n项和，从下面①②③中选出两个条

件，证明另一个条件成立.

①数列$\{a_n\}$为等差数列；②数列$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列；③$a_2=3a_1$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

【答案】见解析.

【微信公众号：数学研讨 解析】一、选择条件①③

已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_2=2a_1$，设公差为d

则$a_2=3a_1=a_1+d$，即$d=2a_1$

因为$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2a_1$

则$\sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}\cdot n\ (a_1>0)$

所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列

二、选择条件①②

已知$\{a_n\}$为等差数列，数列$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列，设公差为d

则$a_n=a_1+(n-1)d$

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{1}{2}n^2d+(a_1-\frac{d}{2})n$

若数列$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列

则$a_1=\frac{d}{2}$

所以$a_2=a_1+d=3a_1$

三、选择条件②③

已知数列$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列，$a_2=3a_1$设公差为d

则$\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=d$，即$\sqrt{4a_1}-\sqrt{a_1}=d$

则$a_1=d^2$　　$\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d=nd$

则$S_n=n^2d$

$a_n=S_n-S_{n-1}=2dn-d$

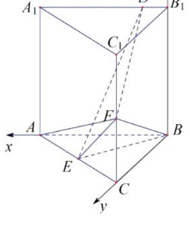
所以$\{a_n\}$为等差数列

19.（12分）

已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面AA_1B_1B为正方形，$AB=BC=2$，E，F分别为AC和CC_1的中点，D为棱A_1B_1上的点，$BF\perp A_1B_1$.

（1）证明：$BF\perp DE$；

（2）当B_1D为何值时，面BB_1C_1C与面DEF所成的二面角的正弦值最小？



【答案】（1）略；（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【微信公众号：数学研讨 解析】（1）因为E，F是直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中AC和CC_1的中点，且$AB=BC=2$，

所以$CF=1$，$BF=\sqrt{5}$，连结AF，由$BF\perp A_1B_1$且$AB//A_1B_1$，则$BF\perp AB$，于是$AF=3$，

所以，$AC=2\sqrt{2}$，由$AB^2+BC^2=AC^2$，则$BA\perp BC$，故如图右图所示，建立空间直角$B-xyz$坐标系：

于是$A(2,0,0)$，$B(0,0,0)$，$C(0,2,2)$，$E(1,1,0)$，$F(0,2,1)$，

设$B_1D=m$，则$D(m,0,2)$．

于是，$\overrightarrow{BF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{DE}=(1-m,1,-2)$

由$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$可得$BF\perp DE$；

（2）易知平面BB_1C_1C的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$；

而$\overrightarrow{DE}=(1-m,1,-2)$

$\overrightarrow{EF}=(-1,1,1)$

于是，平面DFE的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(3,m+1,2-m)$

于是$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{3}{\sqrt{2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{2}}}$

当$m=\dfrac{1}{2}$时，面BB_1C_1C与面DFE所成的二面角的余弦值最大为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，此时其正弦值最小为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

20．（12分）

抛物线C的顶点为坐标原点O，焦点在x轴上，直线$l:x=1$交C于点P，Q两点，且$OP\perp OQ$．已知点$M(2,0)$，且$\odot M$与l相切．

（1）求C，$\odot M$的方程；

（2）设A_1，A_2，A_3是C上的三个点，直线A_1A_2，A_1A_3均与$\odot M$相切．判断直线A_2A_3与$\odot M$的位置关系，并说明理由．

【答案】（1）C的方程为$y^2=x$，$\odot M$的方程为$(x-2)^2+y^2=1$；（2）相切．

【微信公众号：数学研讨 解析】（1）C的方程为$y^2=x$，$\odot M$的方程为$(x-2)^2+y^2=1$，过程从略；

（2）设$A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$，$A_3(x_2,y_2)$．

当A_1，A_2，A_3中有一个为坐标原点，另外两个点的横坐标的值均为3时，满足条件，且此时直线A_2A_3与$\odot M$也相切；

当$x_1\neq x_2\neq x_3$时，可知，直线A_1A_2的方程为$x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，

此时有，$\dfrac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$，即$(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$．

同理可得，$(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$．

所以y_2,y_3是方程$(y_1^2-1)t^2+2y_1t+3-y_1^2=0$的两根．

依题意有，直线A_2A_3的方程为$x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$．

令M到直线A_2A_3的距离为d，则有

$$d^2=\frac{(2+y_2y_3)^2}{1+(y_2+y_3)^2}=\frac{(2+\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1})^2}{1+(\frac{-2y_1}{y_1^2-1})^2}=1.$$

此时，直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 也相切.

综上，直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 也相切.

21.（12 分）

已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $f(x)=\frac{x^2}{2^x},(x>0)$

（1）当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 单调区间

（2）要使 $y=f(x)$ 与 $y=1$ 有有且仅有两个交点，求 a 取值范围.

【答案】（1）递增区间 $\left(0,\frac{2}{\ln2}\right)$，递减区间 $\left(\frac{2}{\ln2},+\infty\right)$；（2） $a\in(1,e)\cup(e,+\infty)$

(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2^x},(x>0)$.

求导：$f'(x)=\frac{x(2-x\ln2)}{2^x},(x>0)$

令 $f'(x)>0$，即 $0<x<\frac{2}{\ln2}$，此时 $f(x)$ 单调递增；

令 $f'(x)<0$，即 $x>\frac{2}{\ln2}$，此时 $f(x)$ 单调递减；

故 $f(x)$ 的单调递增区间 $\left(0,\frac{2}{\ln2}\right)$，递减区间 $\left(\frac{2}{\ln2},+\infty\right)$.

（2）要使 $y=f(x)$ 与 $y=1$ 有 2 个交点，

即 $\frac{x^a}{a^x}=1$ 有 2 解，故 $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$ 有 2 解.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x},(x>0)$，求导：$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},(x>0)$

令 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，解得 $x=e$.

令 $g'(x)>0$，即 $0<x<e$，此时 $g(x)$ 单调递增；

令 $g'(x)<0$，即 $x>e$，此时 $g(x)$ 单调递增；

故 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，而 $g(x)$ 在 $x>e$ 时，$g(x)\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$

因 $g(1)=0$.即要使条件成立，即：$0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$

Ⅰ：当 $0<a<1$，此时不符合条件。

Ⅱ：当 $a>1$，因 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$

故 $a\in(1,e)\cup(e,+\infty)$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\theta$.

（1）将 C 的极坐标方程化为直角坐标方程；

（2）设 A 点的直角坐标为 $(1,0)$，M 为 C 上的动点，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$，写出 P 的轨迹 C_1 的参数方程，并判断 C 与 C_1 是否有公共点.

【答案】见解析.

【微信公众号：数学研讨 解析】（1）$\because\ \rho=2\sqrt{2}\cos\theta\quad\therefore\ \rho^2=2\sqrt{2}\rho\cos\theta$

$\because\ \rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$

$\therefore\ x^2+y^2=2\sqrt{2}x$，

即曲线 C 的直角坐标方程为：$(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$

（2）设 P 点坐标为 (x,y)，M 点坐标为 (x',y')，

$\therefore\ \overrightarrow{AP}=(x-1,y),\overrightarrow{AM}=(x'-1,y')$

$\because\ \overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$

$\therefore\ \begin{cases}x-1=\sqrt{2}(x'-1)\\ y=\sqrt{2}y'\end{cases}$，即 $\begin{cases}x'=\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+1\\ y'=\dfrac{y}{\sqrt{2}}\end{cases}$

$\because$ M 为 C 上的动点

$\therefore\ (\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+1-\sqrt{2})^2+(\dfrac{y}{\sqrt{2}})^2=2$，即 $\therefore\ (x-\sqrt{2}-3)^2+y^2=4$

故 P 的轨迹 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+\sqrt{2}+2\cos\alpha\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（其中 α 为参数 $\alpha\in[0,2\pi)$）

$\therefore\ |CC_1|=3$，$r_1=2$，$r=\sqrt{2}$

$\therefore\ r_1-r<|CC_1|<r_1+r$

$\therefore$ C 与 C_1 有公共点.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-2|$，$g(x)=|2x+3|-|2x-1|$.

（1）画出 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像.

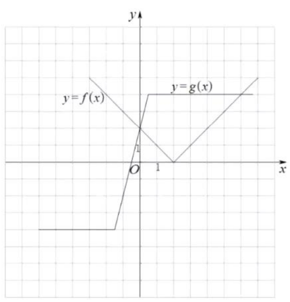
（2）若 $f(x+a)\ge g(x)$，求 a 的取值范围.

【答案】见解析

【微信公众号：数学研讨 解析】

（1）易知 $g(x)=\begin{cases}-4,x<-\dfrac{3}{2}\\ 4x+2,-\dfrac{3}{2}\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 4,x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

则 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像为



（2）由（1）中的图可知，$y=f(x+a)$ 是 $y=f(x)$ 左右平移 $|a|$ 个单位得到的结果，向右平移不合题意，向左平移至 $y=f(x+a)$ 的右支过点曲线，$y=g(x)$ 上的 $(\dfrac{1}{2},4)$ 点为临界状态，此时 $y=f(x+a)$ 右支的解析式为 $y=x+a-2$，由点 $(\dfrac{1}{2},4)$ 在 $y=x+a-2$ 可

知 $4=\frac{1}{2}+a-2$，解得 $a=\frac{11}{2}$，若要满足题意，则 $y=f(x+a)$ 要再向左平移，则 $a\geq\frac{11}{2}$，则 a 的取值范围为 $[\frac{11}{2},+\infty)$