乐山市高中2023届第一次调查研究考试
理科数学参考答案及评分意见

2022.12

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

CBBCC　BAACD　BA

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $y^2=12x$；　14. -3；　15. 4；　16. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

三、解答题：本大题共6小题，共70分.

17. 解：（1）∵等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2+a_3=15$，$\therefore a_2=5$. ……1分

$\because a_1=2$，$\therefore d=a_2-a_1=3$，$\therefore a_n=3n-1$. ……3分

∵等比数列$\{b_n\}$满足$b_1b_2b_3=64$，$\therefore b_2=4$. ……4分

$\because b_1=2$，$\therefore q=\dfrac{b_2}{b_1}=2$，$\therefore b_n=2^n$. ……6分

（2）由题知$\{c_n\}$的前20项

$S_{20}=a_1+a_3+\cdots+a_{19}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_4}+\cdots+\sqrt{b_{20}}$ ……8分

$=\dfrac{2+56}{2}\cdot 10+\dfrac{2\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=2336$. ……12分

18. 解：（1）$f(x)=\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})+\sin^2 x$

$=\cos 2x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$ ……4分

∴函数$f(x)$的最大值为$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，最小正周期为π. ……6分

（2）$\because f(\dfrac{B}{2})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin B=-\dfrac{1}{4}$，$\therefore \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……7分

∵B为锐角，$\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$. ……8分

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$， ……9分

$\therefore a=2\sin A$，$c=2\sin C$.

$\therefore S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}\sin A\sin C$. ……10分

$\therefore \sqrt{3}\cos A\cos C+S=\sqrt{3}(\cos A\cos C+\sin A\sin C)=\sqrt{3}\cos(A-C)$. ……11分

当$A=C=\dfrac{\pi}{3}$时，原式有最大值$\sqrt{3}$. ……12分

19. **解**：（1）延长BA、CD交于点E，连接EP，则EP为平面PAB和平面PCD的交线.

……………………3 分

$\because E\in AB$，$AB\subset$平面PAB，
$\therefore E\in$平面PAB.
同理可得$E\in$平面PCD.
$\therefore E\in$平面$PAB\cap$平面PCD.
$\because P\in$平面PAB，$P\in$平面PCD，
$\therefore P\in$平面$PAB\cap$平面PCD.
$\therefore EP$为平面PAB和平面PCD的交线. ……………………6 分

（2）$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp AC$，$PA\perp AB$

$\because$三角形PAC的面积为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$PA=1$，

$\therefore \dfrac{1}{2}PA\times AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$AC=\sqrt{2}$.从而$PC=\sqrt{3}$.

又在直角三角形PAB中，$PA=AB=1$，$\therefore PB=\sqrt{2}$.
在$\triangle PBC$中，$PB=\sqrt{2}$，$BC=1$，$PC=\sqrt{3}$，
$\therefore PB^2+BC^2=PC^2$，$\therefore PB\perp BC$.
$\because BC\perp PA$，
$\therefore BC\perp$平面PAB. ……………………8 分
设平面PAB与平面PCD所成锐二面角为θ，
$\therefore \triangle PCD$在平面PAB上的投影为$\triangle PAB$，

$\because ABCD$为直角梯形，由$AB=BC=1$，$AD=\dfrac{1}{2}$，$\therefore DC=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$\because$在直角三角形PAD中，$PA=1$，$AD=\dfrac{1}{2}$，$\therefore PD=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

$\because$在三角形PCD中，由$CD=PD=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$PC=\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle PCD}=\dfrac{\quad}{4}$.

$$\therefore \cos\theta=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$\therefore$平面PAB与平面PCD所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………12 分

（注：建立空间直角坐标系也可以求解，未说明$AB\perp AD$扣 2 分.）

20. 解：（1）设实付金额为 X 元，则 X 可能取值为 0，100，200. ……………………1 分

则 $P(X=0)=(\frac{1}{5})^2=\frac{1}{25}$，

$P(X=100)=C_2^1(\frac{1}{5})^1\cdot(\frac{4}{5})=\frac{8}{25}$，

$P(X=200)=(\frac{4}{5})^2=\frac{16}{25}$， ……………………4 分

则 X 的分布列为

X	0	100	200
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{16}{25}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{25}+100\times\frac{8}{25}+200\times\frac{16}{25}=160$（元） ……………………5 分

（2）若选方案一，设摸到红球的个数为 Y，实付金额为 φ，则 $\varphi=300-100Y$，

由题意得 $Y\sim B(2,\frac{1}{5})$，故 $E(Y)=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$，

$\therefore E(\varphi)=E(300-100Y)=300-100E(Y)=300-40=260$（元） ……………………7 分

若选方案二，设实付金额为 ξ，则 ξ 得可能取值为 0，150，250.

则 $P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$，

$P(\xi=150)=\frac{C_2^1\cdot C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$，

$P(\xi=250)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$. ……………………10 分

则 ξ 的分布列为

ξ	0	150	250
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

$\therefore E(\xi)=0\times\frac{1}{45}+150\times\frac{16}{45}+250\times\frac{28}{40}\approx 208.9$（元） ……………………11 分

$\because E(\varphi)>E(\xi)$，

$\therefore$ 选择方案二更合理. ……………………12 分

21. 解：（1）$\because g(x)=xe^{\frac{1}{2}x}-e^x+1$，

$\therefore g'(x)=(\frac{1}{2}x+1)e^{\frac{1}{2}x}-e^x=e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}x+1-e^{\frac{1}{2}x})$. ……………………1 分

令 $h(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{\frac{1}{2}x}$，则 $h'(x)=\frac{1}{2}(1-e^{\frac{1}{2}x})$. ……………………2 分

当 $x>0$ 时，$h'(x)=\frac{1}{2}(1-e^{\frac{1}{2}x})<0$. ……………………3 分

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $h(x)<h(0)=0$. ……………………

$\because e^{\frac{1}{2}x}>0$，$\therefore g'(x)=e^{\frac{1}{2}x}(\frac{1}{2}x+1-e^{\frac{1}{2}x})<0$.

$\therefore g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，故$g(x)<g(0)=0$.

$\therefore$当$x>0$时，$g(x)<0$. ……5分

（2）由（1）可知，当$x>0$时，$xe^{\frac{1}{2}x}-e^{x}+1<0$.

令$t=e^{\frac{1}{2}x}>1$，则上式化为$2t\ln t-t^2+1<0$.

$\therefore 2\ln t<t-\frac{1}{t},t>1$. ……7分

令$t=\sqrt{\frac{i+1}{i}}>1, i\in N^*$得

$\therefore 2\ln\sqrt{\frac{i+1}{i}}<\sqrt{\frac{i+1}{i}}-\sqrt{\frac{i}{i+1}}=\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}$.

$\therefore \ln\frac{i+1}{i}<\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}, i\in N^*$. ……9分

$\because \sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{i+1}{i}=\ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$. ……11分

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}>\ln(n+1)$，得证. ……12分

22. 解：（1）$\because \rho=2\sin\theta$，$\therefore \rho^2=2\rho\sin\theta$ ……1分

$\because \rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$. ……3分

$\therefore C$的直角坐标方程为：$x^2+(y-1)^2=1$. ……5分

（2）由已知可得点A,B的直角坐标为$A(0,1),B(\sqrt{3},1)$. ……6分

$\because$线段BP的中垂线与直线AP交于点Q，

$\therefore |QB|=|QP|$且$||QB|-|QA||=\pm1$. ……7分

设$Q(x,y)$，则$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\pm1$. ……8分

化简可得点Q的轨迹方程$2x^2-y^2-2\sqrt{3}x+2y=0$. ……10分

23. 解：（1）$f(x)=2|x+1|-|2x+3|=|2x+2|-|2x+3|$

$\leqslant|(2x+2)-(2x+3)|=1$ ……4分

$\therefore f(x)$的最大值$m=1$. ……5分

（注：分段讨论也可求解.）

（2）$\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{bc}}$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{ac}}$， ……7分

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{ac}}$. ……8分

$\because abc=1$，$\therefore \frac{1}{ab}=c$，$\frac{1}{bc}=a$，$\frac{1}{ac}=b$， ……9分

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\sqrt{c}+\sqrt{b}+\sqrt{a}$.

当$a=b=c$时等号成立，即原式不等式成立. ……10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。