

# 1号卷·A10联盟2022届高三上学期11月段考

## 数学(理科)参考答案

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	B	A	A	D	D	C	B	C	D

1. C 由题意得,  $A = \{-1, 0, 1\}$ ,  $\therefore B = \{1, a\}$ ,  $B \subseteq A$ .  $\therefore$  实数  $a$  的取值集合为  $\{-1, 0\}$ . 故选 C.

2. A 因为由“数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  都是等差数列”可得到“数列  $\{a_n + b_n\}$  是等差数列”, 反之不成立. 故选 A.

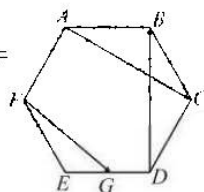
3. B 由图知  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq +1\}$ , 排除选项 A, D, 又因为  $f(0) = 1$ , 排除选项 C. 故选 B.

4. B  $\frac{8\phi^2 \cos^2 18^\circ}{2-\phi} = \frac{32 \sin^2 18^\circ \cos^2 18^\circ}{2-2 \sin 18^\circ} = \frac{8 \sin^2 36^\circ}{2-2 \sin 18^\circ} = \frac{2(1-\cos 72^\circ)}{1-\cos 72^\circ} = 2$ . 故选 B.

5. A  $\because f(x) = 2xf'(e) + \ln x$ ,  $\therefore f'(x) = 2f'(e) + \frac{1}{x}$ ,  $\therefore f'(e) = 2f'(e) + \frac{1}{e}$ , 解得  $f'(e) = -\frac{1}{e}$ ,  $\therefore f'(x) = -\frac{2}{e} + \frac{1}{x}$ ,  $\therefore f'(1) = 1 - \frac{2}{e}$ . 故选 A.

6. A  $\because m = \ln a^{\frac{1}{4}}$ ,  $n = \ln b^{\frac{1}{2}}$ ,  $p = \ln(\log_b a)$ ,  $\therefore$  比较  $a^b$ ,  $b^a$ ,  $\log_b a$  的大小即可.  
令  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ , 则  $a^b = \frac{1}{2}$ ,  $b^a = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ ,  $\log_b a = 2$ ,  $\therefore \frac{1}{2} < \sqrt[4]{\frac{1}{2}} < 2$ ,  
 $\therefore a^b < b^a < \log_b a$ , 即  $m < n < p$ . 故选 A.

7. D 作出图形如下所示,  $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} =$   
 $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{DB}$ . 故选 D.



8. D 由题意得,  $b \sin A - 2c \sin B = 0$ , 由正弦定理得,  $a = 2c$ .

$\therefore \tan B = \sqrt{15} = \frac{\sin B}{\cos B}$ ,  $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ , 联立两式, 解得  $\sin B = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ,

$\cos B = \frac{1}{4}$ . 由余弦定理得,  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ , 即  $36 = 4c^2$ , 解得  $c = 3$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{9\sqrt{15}}{4}$ . 故选 D.

9. C 由题意得,  $f(1)=0$ , 又  $f(0+1)=3f(0)$ ,  $\therefore f(0)=0$ ,  
 $f(-2)=\frac{1}{3}f(-2+1)=\frac{1}{3}f(-1)=\frac{1}{9}f(-1+1)=\frac{1}{9}f(0)=0$ .  $\therefore x \in (-2, -1)$ ,  
 $\therefore x+2 \in (0, 1)$ ,  $\therefore f(x)=\frac{1}{3}f(x+1)=\frac{1}{9}f(x+2)=\frac{4}{9}(x+2)(x+1)=$   
 $\frac{4}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{9}$ , 故当  $x=-\frac{3}{2}$  时,  $f(x)$  取得最小值  $-\frac{1}{9}$ . 综上, 当  $x \in [-2, -1]$  时,  
 $f(x)$  的最小值是  $-\frac{1}{9}$ . 故选 C.
10. B  $\because$  点  $M, N$  关于点  $C$  对称,  $\therefore C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ ,  $\therefore T=2 \times \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \pi$ ,  $\therefore \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ,  
 故①正确; 由图得,  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{\pi}{12}$  对称,  $\therefore 2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi =$   
 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 解得  $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ,  $\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$ ,  
 $\therefore f(x) = A \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ . 令  $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 解得  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ,  
 当  $k=2$  时,  $x = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\therefore f(x)$  图象的一个对称中心为  $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ , 故②正确; 令  
 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 解得  $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ,  
 故③错误; 函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度后, 可得  
 $g(x) = A \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = A \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ , 不是偶函数, 故④错误, 故选 B.
11. C  $\because 2a_{n+1} - a_n = n + 2$ ,  $\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}n + 1$ ,  $\therefore a_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{2}(a_n - n)$ , 又  
 $a_1 - 1 = 4$ , 则数列  $\{a_n - n\}$  是首项为 4, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  
 $\therefore a_n - n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{3-n}$ ,  $\therefore a_n = n + 2^{3-n}$ ,  
 $\therefore S_n = (1+2+3+\dots+n) + (2^2 + 2 + 2^{-1} + \dots + 2^{3-n}) = 8 - 2^{3-n} + \frac{n(n+1)}{2}$ ,  
 $\because S_{62} = 1961 - 2^{-59} < 2021$ ,  $S_{63} = 2024 - 2^{-60} > 2021$ ,  $\therefore$  满足不等式  $S_n > 2021$   
 的最小整数  $n$  的值为 63. 故选 C.

12. D 当  $x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right)$  时,  $\sin x + \sin 2x = \sin x(1 + 2\cos x) > 0$ ,  $bx \cos x \leq 0$ , 原不等式恒成立; 当  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  时,  $\cos x > 0$ , 不等式等价于  $\frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x \geq bx$ . 令  $h(x) = \frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x - bx$ ,  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ , 则  $h(0) = 0$ ,  $h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x - b$ . 令  $g(x) = h'(x)$ , 则  $g'(x) = \frac{2\sin x(1 - \cos^3 x)}{\cos^3 x} > 0$  恒成立, 则  $h'(x)$  在  $\left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  上单调递增,  $h'(0) = 3 - b$ . 若  $b > 3$ , 则  $h'(0) < 0$ . 记  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{b}}$ ,  $\theta \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ , 则  $h'(\theta) = b + \frac{2}{\sqrt{b}} - b = \frac{2}{\sqrt{b}} > 0$ , 则存在  $x_0 \in (0, \theta)$ , 使得  $h'(x_0) = 0$ . 当  $x \in (0, x_0)$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减,  $\therefore$  当  $x \in (0, x_0)$  时,  $h(x) < h(0) = 0$ , 不符合题意, 舍去; 若  $b \leq 3$ ,  $h'(x) > h'(0) \geq 0$ , 即当  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  时,  $h(x)$  单调递增, 则  $h(x) > h(0) = 0$ , 符合题意, 则正实数  $b$  的取值范围是  $(0, 3]$ . 故选 D.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13.  $\sqrt{13}$

$$\because a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos 135^\circ = 1 \times \sqrt{2} \times \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1, \therefore |a - 2b| = \sqrt{(a - 2b)^2} = \sqrt{|a|^2 - 4a \cdot b + 4|b|^2} = \sqrt{1 + 4 + 8} = \sqrt{13}.$$

14.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

由等差、等比数列的性质, 得  $a_3 a_{11} = a_7^2 = 5$ ,  $b_1 + b_{10} = 2b_5 = \frac{20\pi}{3}$ ,

$$\therefore \sin \frac{b_2 + b_{10}}{1 - a_3 a_{11}} = \sin \frac{\frac{20\pi}{3}}{1 - 5} = \sin \left( -\frac{5\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

15.  $\left( \frac{13}{3}, \frac{14}{3} \right)$

当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 3 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^x$  单调递减, 且  $f(x) \in [3, +\infty)$ . 当  $x > 0$  时,

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 3, \quad f'(x) = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2), \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 或}$$

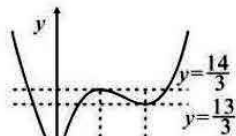
$x > 2$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $1 < x < 2$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  和  $(2, +\infty)$  上单调递增, 在  $(1, 2)$  上单调递减.  $\therefore$  在  $x=1$  处,  $f(x)$  取得极大值  $f(1) = \frac{14}{3}$ , 在  $x=2$

处,  $f(x)$  取得极小值  $f(2) = \frac{13}{3}$ , 得到函数  $f(x)$  的图象如下.

$$g(x) = [f(x)]^2 - (a+2)f(x) + 2a = [f(x)-a] \cdot [f(x)-2],$$

$\therefore f(x) \geq 3$ .  $\therefore g(x)$  有 4 个不同的零点等价于函数  $f(x)$

的图象与直线  $y=a$  有 4 个不同的交点,  $\therefore \frac{13}{3} < a < \frac{14}{3}$ .



16.  $15\sqrt{15}$

设  $OP = \sqrt{3}h$ , 则  $OA = \frac{PO}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}h}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3h$ .  $OB = \frac{PO}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}} = h$ .

$OC = \frac{PO}{\tan \frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}h$ . 在  $\triangle OBC$  中,  $OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC \cdot \cos \angle OBC$ , 即

$3h^2 = h^2 + 75^2 - 2 \times 75h \cos \angle OBC$  ①, 在  $\triangle OAB$  中,  $OA^2 = OB^2 + AB^2 - 2OB \cdot AB \cdot \cos \angle OBA$ , 即  $9h^2 = h^2 + 75^2 - 2 \times 75h \cos \angle OBA$  ②,  $\therefore \cos \angle OBC + \cos \angle OBA = 0$ ,  $\therefore$  ①②两式相加可得  $12h^2 = 2h^2 + 2 \times 75^2$ , 解得  $h = 15\sqrt{5}$ , 则  $OP = \sqrt{3}h = 15\sqrt{15}$ .

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

(I) 若  $q$  为真命题, 则  $\begin{cases} \Delta = a^2 - 4a < 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$ , .....3 分

解得  $0 < a < 1$  或  $1 < a < 4$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $(0, 1) \cup (1, 4)$ . .....5 分

(II) 若  $p$  为真命题, 则  $-2 \leq a - 4 \leq 2$ , 即  $2 \leq a \leq 6$ . .....6 分

$\therefore p \vee (\neg q)$  为假命题,  $\therefore p$  假  $q$  真,  $\therefore \begin{cases} a < 2 \text{ 或 } a > 6 \\ 0 < a < 1 \text{ 或 } 1 < a < 4 \end{cases}$ , .....9 分

$\therefore 0 < a < 1$  或  $1 < a < 2$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $(0, 1) \cup (1, 2)$ . .....10 分

18. (本小题满分 12 分)

(I) 由题意得,  $f(x) = -\cos 2\omega x + \sqrt{3} \sin 2\omega x = 2 \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ , .....2 分

由  $f\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = f(x)$ , 得  $f(x)$  图象的一条对称轴为  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

$$\therefore \frac{4\omega\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \therefore \omega = \frac{3}{4}k + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 又 } 0 < \omega < 1, \text{ 解得 } \omega = \frac{1}{2},$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由题意得,  $g(x) = 2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\frac{x}{2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\because g\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{6}{5}, \therefore -2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{6}{5}, \text{ 即 } \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{5},$$

$$\because \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \theta + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right), \therefore \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos\theta = \cos\left[\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

(I)  $\because \cos 2A - \cos 2B = 2\sin C(\sin B - \sin C),$

$$\therefore 1 - 2\sin^2 A - 1 + 2\sin^2 B = 2\sin C(\sin B - \sin C),$$

$$\text{整理得, } \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = bc, \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}, \because A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{3} \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } AB = AD, \therefore \triangle ABD \text{ 为等边三角形, } \therefore \angle BDC = \frac{2\pi}{3} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle BDC \text{ 中, } \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C}, \text{ 即 } \frac{3}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2}{\sin C}, \text{ 解得 } \sin C = \frac{\sqrt{3}}{3} \dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 设  $DC = x$ , 则  $AD = AB = BD = 2x$ ,  $AC = 3x$ .  $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得, } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{4x^2 + 9x^2 - 9}{2 \cdot 2x \cdot 3x} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } x = \frac{3\sqrt{7}}{7} \text{ (负值舍去), } \therefore AC = \frac{9\sqrt{7}}{7} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (本小题满分 12 分)

(I) 由题意得,  $a_{n+1} + 1 = 2a_n + 2^{n+1}, \therefore a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1) + 2^{n+1},$

$$\therefore \frac{a_{n+1} - 1}{2^{n+1}} = \frac{a_n - 1}{2^n} + 1, \text{ 即 } b_{n+1} = b_n + 1, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \because b_1 = \frac{a_1 - 1}{2} = 2, \therefore \text{数列 } \{b_n\} \text{ 是以 } 2 \text{ 为首项, } 1 \text{ 为公差的等差数列,}$$

$\therefore b_n = 2 + (n-1) \times 1 = n+1$ . .....5分

(II) 由(I)知,  $\frac{a_n - 1}{2^n} = n+1$ ,  $\therefore a_n = (n+1) \cdot 2^n + 1$ ,  $\therefore a_{2n} = (2n+1) \cdot 4^n + 1$ . .....6分

令  $c_n = (2n+1) \cdot 4^n$ . 下面先求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $Q_n$ ,

$Q_n = 3 \times 4^1 + 5 \times 4^2 + 7 \times 4^3 + \dots + (2n+1) \cdot 4^n$ ,

$4Q_n = 3 \times 4^2 + 5 \times 4^3 + 7 \times 4^4 + \dots + (2n+1) \cdot 4^{n+1}$ ,

两式相减得,  $-3Q_n = 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + 2 \times 4^3 + \dots + 2 \cdot 4^n - (2n+1) \cdot 4^{n+1} + 4$ .

即  $-3Q_n = \frac{8(1-4^n)}{1-4} - (2n+1) \cdot 4^{n+1} + 4 = \frac{4}{3} \left( 2n + \frac{1}{3} \right) \cdot 4^{n+1}$ . .....10分

则  $Q_n = \left( \frac{2n}{3} + \frac{1}{9} \right) \cdot 4^{n+1} - \frac{4}{9}$ ,  $\therefore T_n = \left( \frac{2n}{3} + \frac{1}{9} \right) \cdot 4^{n+1} - \frac{4}{9} + n$ . .....12分

21. (本小题满分12分)

(I) 令  $2^x - 2^{-x} = t$ ,

则  $f(x) = g(t) = t^2 + 2 + 2\sqrt{2}t = (t + \sqrt{2})^2 \geq 0$ , 得证. ....3分

(II) 当  $x \in [0, 1]$  时,  $t = 2^x - 2^{-x}$  单调递增,

$\therefore t \in \left[ 0, \frac{3}{2} \right]$ ,  $f(x) = g(t) = t^2 + mt + 2$ . .....5分

当  $-\frac{m}{2} \leq 0$ , 即  $m \geq 0$  时,  $g(t)$  在  $\left[ 0, \frac{3}{2} \right]$  上单调递增,

$\therefore g(t)_{\min} = g(0) = 2$ , 不合题意, 舍去; .....7分

当  $0 < -\frac{m}{2} < \frac{3}{2}$ , 即  $-3 < m < 0$  时,  $g(t)$  在  $\left[ 0, -\frac{m}{2} \right]$  上单调递减, 在  $\left( -\frac{m}{2}, \frac{3}{2} \right]$  上

单调递增,  $\therefore g(t)_{\min} = g\left(-\frac{m}{2}\right) = 2 - \frac{m^2}{4}$ , 令  $2 - \frac{m^2}{4} = 1$ , 解得  $m = -2$  或  $m = 2$ ,

$\because -3 < m < 0$ ,  $\therefore m = -2$ ; .....9分

当  $-\frac{m}{2} \geq \frac{3}{2}$ , 即  $m \leq -3$  时,  $g(t)$  在  $\left[ 0, \frac{3}{2} \right]$  上单调递减,

$\therefore g(t)_{\min} = g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}m + 2 = \frac{17}{4} + \frac{3}{2}m$ .

令  $\frac{17}{4} + \frac{3}{2}m = 1$ , 解得  $m = -\frac{13}{6}$ , 不合题意, 舍去. ....11分

综上, 实数  $m$  的值为  $-2$ . .....12分

22. (本小题满分12分)

(I) 由题意得,  $f'(x) = a - 1 - \ln x$ .

令  $f'(x) = 0$ , 即  $\ln x = a - 1$ , 则  $x = e^{a-1}$ .

当  $e^{a-1} \leq 1$ , 即  $a \leq 1$  时,  $f'(x) \leq 0$ , 函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减;

当  $e^{a-1} \geq 2$ , 即  $a \geq \ln 2 + 1$  时,  $f'(x) \geq 0$ , 函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增;

当  $1 < e^{a-1} < 2$ , 即  $1 < a < \ln 2 + 1$  时, 当  $x \in [1, e^{a-1}]$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x \in (e^{a-1}, 2]$  时,  $f'(x) < 0$ ,

故当  $a \leq 1$  时, 函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减; 当  $1 < a < \ln 2 + 1$  时, 函数  $f(x)$  在  $[1, e^{a-1}]$  上单调递增, 在  $(e^{a-1}, 2]$  上单调递减; 当  $a \geq \ln 2 + 1$  时, 函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增. ....4分

(II)  $\because a = -1, \therefore f(x) = -x - x \ln x, x \in (0, +\infty)$ ,

则  $f(x) + x^3 e^x > 0$  等价于  $-x - x \ln x + x^3 e^x > 0$ , 即  $x^3 e^x - \ln x - 1 > 0$ . ....6分

令  $h(x) = x^2 e^x - \ln x - 1$ , 则  $h'(x) = (x^2 + 2x)e^x - \frac{1}{x}$ .

令  $\varphi(x) = h'(x)$ , 则  $\varphi'(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x + \frac{1}{x^2} > 0 (x > 0)$ ,

$\therefore h'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

又  $h'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16}e^{\frac{1}{4}} - 4 < 0, h'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}e^{\frac{1}{2}} - 2 > 0$ ,

$\therefore$  存在  $x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ , 使  $h'(x_0) = 0$ ,

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $h'(x_0) < 0, h(x)$  单调递减;

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $h'(x_0) > 0, h(x)$  单调递增.

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0^2 e^{x_0} - \ln x_0 - 1, x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ . ....8分

$\because h'(x_0) = (x_0^2 + 2x_0)e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0, \therefore x_0^2 e^{x_0} = \frac{1}{x_0 + 2}$ ,

$\therefore h(x)_{\min} = \frac{1}{x_0 + 2} - \ln x_0 - 1, x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ . ....10分

设  $\lambda(x) = \frac{1}{x+2} - \ln x - 1 \left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right)$ , 则  $\lambda'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x} < 0 \left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right)$ ,

$\therefore \lambda(x)$  在  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$  上单调递减,  $\therefore \lambda(x) > \lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 - \frac{3}{5} > 0$ ,

即  $h(x)_{\min} = \frac{1}{x_0 + 2} - \ln x_0 - 1 > 0, \therefore f(x) + x^3 e^x > 0$ . ....12分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

