2022 年深圳市高三年级第二次调研考试

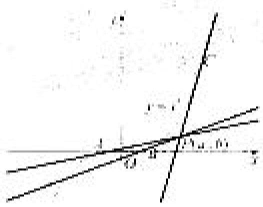
数学　参考答案与评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	D	A	D	A	B	C

说明与略解：

1. 选择 C．[illegible]
2. 选择 C．[illegible]
3. 选择 D．[illegible]
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2,3)-(0,1)+(-3,1)=(-1,3)$；[illegible]
4. 选择 A．[illegible] 32 小时的个体频率 $=1-4\times(0.005+0.04+0.09)=0.46$，[illegible] 32 小时的个体数 $=7.2\times0.46=3.312>3.3$ [illegible] $4\times(0.005+0.040+0.090+0.065+a)=1$ [illegible] $a=0.050$ [illegible]
5. 选择 D．[illegible] $\frac{1}{3}S$ [illegible] $\frac{1}{3}\times\sqrt{3}$ [illegible] $r=\sqrt{3}$ [illegible] $4\pi r^2=\sqrt{3}\times\frac{4}{3}\pi r^3$，得 $r=\sqrt{3}$．
6. 选择 A．由 $\cos\frac{\pi\omega}{2}=\pm1(\omega\neq0)$，$\omega=2k\ (k\in\mathbf{Z},k\neq0)$，可 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{\pi}{|k|}$，[illegible] $T_{max}=\pi$；[illegible] $y=\cos x$ 的图象进行伸缩变换，[illegible] $T_{max}=\pi$．
7. 选择 B．[illegible] $y=x^3$ [illegible]

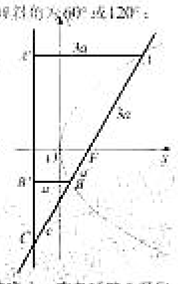


[illegible] (a,b) [illegible] $0<b<a^3$；[illegible] $y=k(x-a)+b$，[illegible] (x_0,x_0^3)，[illegible] $\begin{cases}k(x_0-a)+b=x_0^3,\\k=3x_0^2\end{cases}$ [illegible] k [illegible]

得 $2x_0^3-3ax_0^2+b=0$．令 $g(x)=2x^3-3ax^2+b$，则 $g'(x)=6x(x-a)$．[illegible] $g(x)$ [illegible] $[g(x)]_{极大}=g(0)=b>0$，$[g(x)]_{极小}=g(a)=b-a^3<0$．所以有三条切线 [illegible] $0<b<a^3$．

8. 选择 C．如图，[illegible] A，B [illegible] A'，B'，记 $|FB|=a$，$|BC|=c$．因为 $|FA|=3|FB|$，利用抛物线的定义，[illegible]

由 $\frac{c}{c+4a}=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$，$c=2a$，$\angle CBB'=60^\circ$，结合对称性，得直线 l 的倾斜角为 60° 或 120°；



亦可以设 l 方程为 $x=my+\frac{p}{2}$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}x=my+\frac{p}{2}\\ y^2=2px\end{cases}$

得 $y^2-2pmy-p^2=0$，$\begin{cases}y_1+y_2=2pm\\ y_1y_2=-p^2\end{cases}$，而 $|FA|=3|FB| \Leftrightarrow y_1=-3y_2$，

所以 $\begin{cases}y_1+y_2=-2y_2\\ y_1y_2=-3y_2^2\end{cases}$，$3(y_1+y_2)^2+4y_1y_2=0$，$12p^2m^2-4p^2=0$，

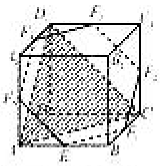
$m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，直线 l 的斜率 $k=\pm\sqrt{3}$，倾斜角等于 60° 或 120°。

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

题号	9	10	11	12
答案	ACD	ACD	AD	ACD

说明与略解：

9. 选择ACD。因为点 $E\in$ 平面 $ABCD$，所以过点 E 且与平面 ACD_1 平行的平面有且只有一个，设这个平面为 α，因为 $EF\,//$ 平面 ACD_1，所以直线 $EF\subset\alpha$，利用两个平面平行的性质定理，容易证明：平面 α 截正方体所得的截面是正六边形 $EE_1E_2FE_3E_4$，其中 $E_1、E_2、F、E_3、E_4$ 分别是棱 $BC、CC_1、C_1D_1、D_1A_1、A_1A$ 的中点；亦可利用线面平行的判定定理证明。



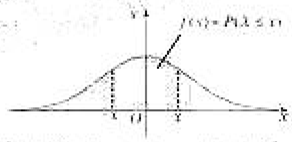
10. 选择ACD。$f(x)=P(X\le x)$ 是标准正态分布的概率分布函数，由标准正态曲线的性质，易知：若 $x>0$，则 $f(-x)=P(X\le -x)=P(X\ge x)$，$f(-x)+f(x)=P(X\ge x)+P(X\le x)=1$，A正确；因为 $x>0$ 时，$f(x)=P(X\le x)>\frac{1}{2}$，$f(2x)=2f(x)>1$ 与 $f(2x)<1$ 矛盾，B不正确；因为 $f(x)$ 是R上的增函数，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，C正确；

若 $x>0$，则 $P(|X|\le x)=P(-x\le X\le x)$

$=2\left[\frac{1}{2}-P(X\le -x)\right]$

$=1-2f(-x)$

$=2f(x)-1$，D正确。



11. 选择AD。分别取 $x=0$，$x=1$ 和 $x=-1$，可以得到 $a_0=2^8$，A正确；$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=1-2^8$，B不正确；$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_8|=3^8-2^8$，C不正确；在等式 $(2-x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ 两边对 x 求导后，再取 $x=1$，得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+8a_8=-8$，D正确。

12. 选择ACD。利用平几知 $|AB|=2\sqrt{1-\frac{1}{|OP|^2}}$，$\sin\frac{\angle APB}{2}=\frac{1}{|OP|}$，而 $|OP|$ 的取值范围是 $[2,+\infty)$，所以 $|AB|_{\min}=\sqrt{3}$，$(\angle APB)_{\max}=60^\circ$，A正确，B不正确；设 $P(t,2)$，则"切点弦"直线 AB

[illegible]$x+2y-1$，所以直线 AB 过定点 $M(0,\frac{1}{2})$，[illegible] AB 中点[illegible]线段 OM [illegible]，D 正确.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $-\frac{4}{5}$　　14. 9　　15. $\frac{1}{2}$　　16. π，4π

说明与略解：

13. 填 $-\frac{4}{5}$．[illegible]，得 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，[illegible]

[illegible]公式.

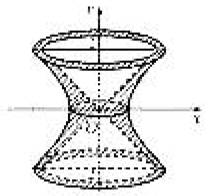
14. 填 9．由 $0<x<1$，得 $\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{1-x}\right)[x+(1-x)]=5+\frac{1-x}{x}+\frac{4x}{1-x}\ge 5+2\sqrt{\frac{1-x}{x}\cdot\frac{4x}{1-x}}=9$；

[illegible]求最小值.

15. 填 $\frac{1}{2}$．[illegible] $f(x)$ 是偶函数的一个必要条件是 $f(-1)=f(1)$，$\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)+k=\ln(e+1)-k$，$k=\frac{1}{2}$.

[illegible] $k=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\ln(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})$ 是偶函数[illegible] $f(-x)=f(x)$，

[illegible] $2kx=x$，所以 $k=\frac{1}{2}$.



16. 填 π，4π．直线 $y=t(-2\le t\le 2)$ 与双曲线 $x^2-y^2=1$ 的交点

坐标为 $(\pm\sqrt{1+t^2},t)$，与渐近线 $y=\pm x$ 的交点坐标为 $(\pm t,t)$，

图形 G 被直线 $y=t(-2\le t\le 2)$ 所截得的两条线段与 y 轴垂直，

它们分别是 $y=t(-\sqrt{1+t^2}\le x\le -|t|,-2\le t\le 2)$，

$y=t(|t|\le x\le\sqrt{1+t^2},-2\le t\le 2)$.

将它们绕 y 轴旋转一周，形成的旋转面是一个圆环[illegible] $(0,t)$，

[illegible] $\sqrt{1+t^2}$ [illegible]，圆环面积 $S=\pi(\sqrt{1+t^2})^2-\pi t^2=\pi$，

[illegible] $(-2\le t\le 2)$ [illegible] π [illegible]，构造一个底面积为 π，高为 4 的柱体，

[illegible]，所求的旋转体的体积相等，即 $V=4\pi$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：(1) 由 $S_n=2a_n-3$，有 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(2a_{n+1}-3)-(2a_n-3)$，　……………………2 分

整理，得 $a_{n+1}=2a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

又 $a_1=S_1=2a_1-3$，$a_1=3$.　……………………4 分

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公比为 2 的等比数列.

$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3\times 2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.　……………………5 分

(2) 由 (1) 知，数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2^n})<\frac{13}{20}$，……7分

求得：$2^n<40$，又 $n\in N^*$，$\therefore n=1,2,3,4,5$，……9分

所以，满足条件的最大整数 $n=5$。……10分

18. 证明：(1) 法1：∵ $a+c=2b\cos A$，根据正弦定理，得 $\sin A+\sin C=2\sin B\cos A$，……2分

$\therefore \sin A=2\sin B\cos A-\sin(A+B)=2\sin B\cos A-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$=\sin B\cos A-\cos B\sin A=\sin(B-A)$，……4分

而 $0<A<\pi$，$-\pi<B-A<\pi$，

$\therefore A+(B-A)=\pi$ 或 $A=B-A$，即 $B=\pi$（舍去）或 $B=2A$；

所以 $B=2A$。……6分

法2：∵ $a+c=2b\cos A$，根据余弦定理，得 $a+c=2b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，……2分

$\therefore b^2=a^2+ac$，

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-(a^2+ac)}{2ac}=\frac{c-a}{2a}$，

$\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2-1$

$=\frac{[(a^2+ac)+c^2-a^2]^2}{2(a^2+ac)c^2}-1=\frac{a+c}{2a}-1=\frac{c-a}{2a}$，

从而 $\cos B=\cos 2A$，……4分

又 $0<B<\pi$，$\cos A=\frac{a+c}{2b}>0$，$0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<2A<\pi$，

所以 $B=2A$。……6分

解：(2) 法1：∵ $a=4$，$b=6$，又由(1)知 $B=2A$，

根据正弦定理，得 $\frac{4}{\sin A}=\frac{6}{\sin 2A}$，$\frac{4}{\sin A}=\frac{6}{2\sin A\cos A}$，……8分

$\therefore \cos A=\frac{3}{4}$，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，

$\cos B=\cos 2A=2\cos^2 A-1=2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\frac{1}{8}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，……10分

所以，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$。……12分

法2：∵ $a+c=2b\cos A$，根据余弦定理，得 $a+c=2b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\therefore b^2=a^2+ac$，

将 $a=4$，$b=6$ 代入，得 $6^2=4^2+4c$，$\therefore c=5$，……8分

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\times4\times6}=\frac{9}{16}$，

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. ……………………10 分

所以，$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$. ……………………12 分

说明：其它解法，类比给分.

19. 证明：(1) ∵ $AM\perp$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，∴ $AM\perp CD$. ……………………2 分

又∵四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $CD\perp AD$.

又 $CD\perp AM$，$CD\perp AD$，$AM\cap AD=A$，$AM\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD

∴ $CD\perp$ 平面 PAD，

又 $CD\subset$ 平面 $ABCD$ ……………………4 分

∴平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………6 分

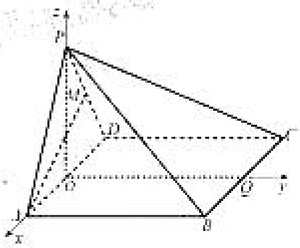
解：(2)（法 1）设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，

取 AD 为 O，BC 的中点 Q，

由 (1) 知 OA，OQ，OP 两两垂直，

以 O 为原点，OA，OQ，OP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，

建立空间直角坐标系 $O-xyz$（如图），则



$A(a,0,0)$，$B(a,2a,0)$，$C(-a,2a,0)$，$D(-a,0,0)$，

$P(0,0,\sqrt{3}a)$，$M(-\frac{1}{2}a,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$.

$\overrightarrow{AM}=(-\frac{3}{2}a,0,\frac{\sqrt{3}}{2}a)$，$\overrightarrow{PB}=(a,2a,-\sqrt{3}a)$，$\overrightarrow{PC}=(-a,2a,-\sqrt{3}a)$. ……………………8 分

设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0$，$\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

∴ $\begin{cases}ax+2ay-\sqrt{3}az=0,\\-ax+2ay-\sqrt{3}az=0.\end{cases}$ 取 $z=2$，得 $x=0$，$y=\sqrt{3}$，

平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},2)$； ……………………10 分

记 AM 与平面 PBC 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AM},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AM}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|-\frac{3}{2}\times 0+0\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2|}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\times\sqrt{0^2+(\sqrt{3})^2+2^2}}=\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

所以 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………12 分

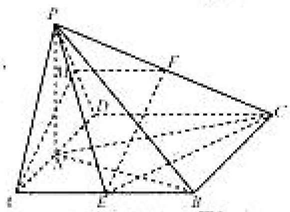
（法 2）分别取 AB，PC，AD 的中点 E，F，N，

连结 EF，EC，FM，PN，∵ M 是 PD 中点，$ABCD$ 是正方形，

∴ $MF\parallel DC$，且 $MF=\frac{1}{2}DC$，又 $AE\parallel DC$，且 $AE=\frac{1}{2}DC$，

∴ $MF\parallel AE$，且 $MF=AE$，从而 $AEFM$ 为平行四边形，

∴ $EF\parallel AM$，



∴AM 与平面 PBC 所成角与 EF 与平面 PBC 所成角相等。

……………………8分

又∵侧面 PAD 是正三角形，N 是 AD 中点，∴ $PN\perp AD$，

而平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，∴ $PN\perp$ 平面 $ABCD$

设正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$，三棱锥 $E-PBC$ 的高为 h，

则 $PN=\sqrt{3}a$，$BN=CN=\sqrt{5}a$，$PB=PC=2\sqrt{2}a$，$S_{\triangle BCE}=a^2$，$S_{\triangle PBC}=\sqrt{7}a^2$，

由 $V_{E-PBC}=V_{P-BCE}$，得 $\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot PN$，$\sqrt{7}a^2h=a^2\cdot\sqrt{3}a$，

∴ $h=\frac{\sqrt{21}}{7}a$。 ……………………10分

又 $EF=\sqrt{3}a$，记 EF 与平面 PBC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{EF}=\frac{\sqrt{21}}{7}a\times\frac{1}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

所以 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$。 ……………………12分

20. **解：**（1）第一场比赛，业余队安排乙与甲进行比赛，业余队获胜的概率为

$P_1=\frac{1}{3}\times p+\frac{2}{3}\times p\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}p$； ……………………2分

第一场比赛，业余队安排丙与甲进行比赛，业余队获胜的概率为

$P_2=p\times\frac{1}{3}+(1-p)\times\frac{1}{3}\times p=-\frac{1}{3}p^2+\frac{2}{3}p$。 ……………………4分

∵ $p>\frac{1}{3}$，∴ $P_1-P_2=\frac{1}{3}p^2-\frac{1}{9}p=\frac{1}{3}p(p-\frac{1}{3})>0$，$P_1>P_2$。

所以，业余队第一场应该安排乙与甲进行比赛。 ……………………5分

（2）由已知 $X=4.5$ 万元，或 $X=3.6$ 万元。 ……………………7分

由（1）知，业余队最优决策是第一场应该安排乙与甲进行比赛。

此时，（法1）业余队获胜的概率为 $P_1=\frac{5}{9}p$，

专业队获胜的概率为 $P_3=\frac{2}{3}\times(1-p)+\frac{1}{3}\times(1-p)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}p$，

所以，非平局的概率为 $P(X=4.5)=P_1+P_3=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$，

平局的概率为 $P(X=3.6)=1-P_1-P_3=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$。 ……………………9分

（法2）平局的概率为 $P(X=3.6)=\frac{1}{3}(1-p)\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}p\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$，

非平局的概率为 $P(X=4.5)=1-P(X=3.6)=1-\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p\right)=\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$。 ……………………9分

X 的分布列为：

X	4.5	3.6
$P(X)$	$\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p$

X 的数学期望为 $E(X)=4.5\times(\frac{8}{9}-\frac{1}{3}p)+3.6\times(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}p)=4.4-0.3p$（万元）．……11分

由 $\frac{1}{3}<p<\frac{1}{2}$，所以 $E(X)$ 的取值范围为 $(4.25,4.3)$（单位：万元）．……12分

21．**解**：（1）（法1）根据已知，得 $\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=3.\end{cases}$ ……2分

解之，得 $a^2=4$，$b^2=1$．……4分

所以，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．……5分

（法2）由已知，$c=\sqrt{3}$，两个焦点的坐标为 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$．……1分

根据椭圆定义，得 $2a=|MF_1|+|MF_2|=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{(1-\sqrt{3})^2+\frac{3}{4}}$

$$=\frac{4+\sqrt{3}}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}=4，\therefore a=2．$$ ……3分

$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$．……4分

所以，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．……5分

（2）选择条件①：

（法1）$N(1,t)$，$t\in\mathbf{R}$，$t\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，由（1）得，不妨设 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，则

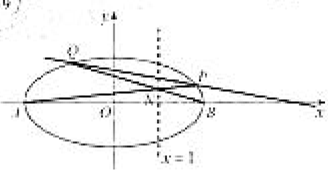
直线 NA 的方程为 $y=\frac{t}{3}(x+2)$，直线 NB 的方程为 $y=-t(x-2)$．……6分

由 $\begin{cases}y=\frac{t}{3}(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(4t^2+9)x^2+16t^2x+16t^2-36=0$．……7分

显然 $x_1=-2$ 是上述方程的一个根，$\therefore$ 另一根为 $x_P=-\frac{1}{2}\times\frac{16t^2-36}{4t^2+9}=\frac{-8t^2+18}{4t^2+9}$，

相应的 $y_P=\frac{12t}{4t^2+9}$，$\therefore P\left(\frac{-8t^2+18}{4t^2+9},\frac{12t}{4t^2+9}\right)$．……8分

同理，得 $Q\left(\frac{8t^2-2}{4t^2+1},\frac{4t}{4t^2+1}\right)$．……9分



当 $t=0$ 时，$P(2,0)$，$Q(-2,0)$，直线 PQ 为 x 轴；

当 $t\neq0$，$t\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，

直线 PQ 的方程为 $\dfrac{y-\frac{4t}{4t^2+1}}{\frac{12t}{4t^2+9}-\frac{4t}{4t^2+1}}=\dfrac{x-\frac{8t^2-2}{4t^2+1}}{\frac{-8t^2+18}{4t^2+9}-\frac{8t^2-2}{4t^2+1}}$，……10分

数学答案与评分标准　第3页（共11页）

考虑到椭圆的对称性，令 $y=0$，则上面方程的左边 $=\frac{-4t^2-9}{3(4t^2+1)-(4t^2+9)}=-\frac{4t^2+9}{2(4t^2-3)}$.

所以 $x=\frac{8t^2-2}{4t^2+1}+\frac{4t^2-9}{2(4t^2-3)}\times\frac{4(4t^2+3)(4t^2-3)}{(4t^2+9)(4t^2+1)}=4$（与 t 无关）.

综上所述，直线 PQ 经过定点 $(4,0)$. ……………………12 分

（法 2）$N(1,t)$，t 为变量，$t\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 当 $t=0$ 时，$P(2,0)$，$Q(-2,0)$，直线 PQ 为 x 轴，

故直线 PQ 经过的定点必在 x 轴上. ……………………6 分

又 $t\to\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，直线 $PQ\to$ 椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 在点 $M\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线 $l:x+2\sqrt{3}y-4=0$，

直线 PQ 经过的定点应是切线 l 与 x 轴的交点 $(4,0)$. ……………………7 分

说明：亦可以通过某一个特殊位置（如取 $t=1$）分析出定点 $(4,0)$.

证明如下：

由（1），不妨设 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

设直线 PQ 的方程为 $x=my+4$，由 $\begin{cases}x=my+4,\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消去 x，

得 P,Q 的纵坐标是方程 $(m^2+4)y^2+8my+12=0$ 的两个根.

由韦达定理，知 $y_1+y_2=-\frac{8m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{12}{m^2+4}$. ……………………8 分

又直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BQ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$.

故直线 AP 与直线 BQ 的交点坐标是方程组 $\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2),\\y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)\end{cases}$ 的解. ……………………9 分

消去 y，得直线 AP 与直线 BQ 的交点横坐标是方程 $\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$ 的根.

而动点 N 的横坐标 $x=1$，所以要证明命题成立，只需证明 $x=1$ 是上述方程的根，

即证明 $\frac{3y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2-2}=0$，即证明 $3y_1(x_2-2)+y_2(x_1+2)=0$. ……………………10 分

将 $x_1=my_1+4$，$x_2=my_2+4$ 代入，只需证明 $3y_1(my_2+2)+y_2(my_1+6)=0$，

只需证明 $2my_1y_2+3(y_1+y_2)=0$.

由 $2my_1y_2+3(y_1+y_2)=2m\times\frac{12}{m^2+4}+3\times\left(-\frac{8m}{m^2+4}\right)=0$ 成立，

故直线 AP 与直线 BQ 的交点的横坐标为 1.

综上所述，直线 PQ 经过定点 $(4,0)$. ……………………12 分

选择条件②：

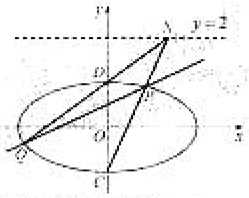
（法 1）$N(t,2)$，t 为变量，由（1），不妨设 $C(0,-1)$，$D(0,1)$，则

直线 NC 的方程为 $3x-ty-t=0$，直线 ND 的方程为 $x-ty+t=0$. ……………………6 分

由 $\begin{cases} 3x-ty-t=0, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(t^2+36)y^2+2t^2y+t^2-36=0$. ……………………7分

$\therefore y_1=-1$，$y_2=-\dfrac{t^2-36}{t^2+36}$，相应的 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{24t}{t^2+36}$. $\therefore P\left(\dfrac{24t}{t^2+36}, -\dfrac{t^2-36}{t^2+36}\right)$. …8分

同理，可得 $Q\left(\dfrac{-8t}{t^2+4}, \dfrac{t^2-4}{t^2+4}\right)$. ……………………9分



当 $t=0$ 时，$P(0,1)$，$Q(0,-1)$，直线 PQ 为 y 轴；

当 $t\neq 0$ 时，直线 PQ 的方程为

$$y-\frac{t^2-4}{t^2+4}=\frac{-\dfrac{t^2-36}{t^2+36}-\dfrac{t^2-4}{t^2+4}}{\dfrac{24t}{t^2+36}+\dfrac{8t}{t^2+4}}\left(x+\frac{8t}{t^2+4}\right).$$ ………10分

考虑到椭圆的对称性，令 $x=0$，得

$$y=\frac{t^2-4}{t^2+4}+\frac{-\dfrac{t^2-36}{t^2+36}-\dfrac{t^2-4}{t^2+4}}{\dfrac{3\times 8t}{t^2+36}+\dfrac{8t}{t^2+4}}\cdot\frac{8t}{t^2+4}=\frac{t^2-4}{t^2+4}-\frac{(t^2-36)(t^2+4)+(t^2-4)(t^2+36)}{3(t^2+4)+(t^2+36)}\cdot\frac{1}{t^2+4}$$

$$=\frac{t^2-4}{t^2+4}-\frac{2(t^2+12)(t^2-12)}{4(t^2+12)}\cdot\frac{1}{t^2+4}=\frac{1}{2}$$ （与 t 无关）

综上所述，直线 PQ 过定点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. ……………………12分

（法2）$N(t,2)$，t 为变量，当 $t=0$ 时，$P(0,1)$，$Q(0,-1)$，直线 PQ 为 y 轴，

若直线 PQ 经过的定点应在 y 轴上.

又取 $t=2$，类似上（法1），得 $P\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，$Q(-2,0)$，直线 PQ 的方程为 $x-4y+2=0$.

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{1}{2}$，直线 PQ 经过的定点应是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. ……………………7分

说明：亦可以通过另一种特殊位置（如取 $t=-2$）分析出定点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

证明如下：

由（1），不妨设 $C(0,-1)$，$D(0,1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

设直线 PQ 的方程为 $y=kx+\dfrac{1}{2}$，由 $\begin{cases} y=kx+\dfrac{1}{2}, \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 消去 y，得

P，Q 的横坐标是方程 $(1+4k^2)x^2+4kx-3=0$ 的两个根.

由韦达定理，知 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{3}{1+4k^2}$. ……………………8分

又直线 CP 的方程为 $y=\dfrac{y_1+1}{x_1}x-1$，直线 DQ 的方程为 $y=\dfrac{y_2-1}{x_2}x+1$.

∴直线CP与直线DQ的交点坐标是方程组$\begin{cases} y=\dfrac{y_1+1}{x_1}x-1, \\ y=\dfrac{y_2-1}{x_2}x+1 \end{cases}$的解．……………………9分

消去x，得直线CP与直线DQ的交点纵坐标满足方程$\dfrac{y_1+1}{x_1}(y-1)=\dfrac{y_2-1}{x_2}(y+1)$可知，

而点Q的纵坐标$y=2$，所以要证明命题成立，只需证明$y=2$是上述方程的解，

即证明$\dfrac{y_1+1}{x_1}=3\times\dfrac{y_2-1}{x_2}$，即证明$3x_1(y_2-1)-x_2(y_1+1)=0$ ……………………10分

将$y_1=kx_1+\dfrac{1}{2}$，$y_2=kx_2+\dfrac{1}{2}$代入，只需证明$3x_1\left(kx_2-\dfrac{1}{2}\right)-x_2\left(kx_1+\dfrac{3}{2}\right)=0$，

只需证明$4kx_1x_2-3(x_1+x_2)=0$．

而$4kx_1x_2-3(x_1+x_2)=4k\left(-\dfrac{3}{1+4k^2}\right)-3\left(-\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)=0$成立，

∴直线AP与直线BQ的交点的纵坐标为2．

综上所述，直线PQ经过定点$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$． ……………………12分

22. **解**：(1)由题知，$f'(x)=e^x+xe^x-2ax-2a=(x+1)(e^x-2a)$． ……………………1分

①当$a\le 0$时，∵$e^x-2a>0$，∴$x<-1$时，$f'(x)<0$；$x>-1$时，$f'(x)>0$．

∴$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增． ……………………2分

②当$0<a<\dfrac{1}{2e}$时，

x	$(-\infty,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

∴$f(x)$在$(-\infty,\ln 2a)$上单调递增，在$(\ln 2a,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增．……3分

③当$a=\dfrac{1}{2e}$时，∵$f'(x)=(x+1)\left(e^x-\dfrac{1}{e}\right)\ge 0$，∴$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增．…………4分

④当$a>\dfrac{1}{2e}$时，

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

∴$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增，在$(-1,\ln 2a)$上单调递减，在$(\ln 2a,+\infty)$上单调递增．……5分

(2)首先证明：当$f(x)$有在$(0,+\infty)$上的极小值时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数．

由(1)知，当$a\le\dfrac{1}{2e}$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数； ……………………6分

当$a>\dfrac{1}{2e}$时，$f(x)$存在极小值，$[f(x)]_{极小值}=f(\ln 2a)$，$f(x)$在$(\ln 2a,+\infty)$上是增函数．

由极小值小于零，得$f(\ln 2a)=-a(\ln 2a)^2+2a^2-a<0$，

而$a>\dfrac{1}{2e}$，∴$(\ln 2a)^2-2a+1>0$． ……………………7分

数学参考答案（理科）第10页（共11页）

设 $g(x)=(\ln 2x)^2-2x+1$，则 $g'(x)=\frac{2(\ln 2x-x)}{x}$，再设 $h(x)=\ln 2x-x$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增；

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

∴ $[h(x)]_{\max}=h(1)=\ln 2-1<0$，∴ $h(x)<0$，从而 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $g(\frac{1}{2})=0$，∴ 不等式 $g(x)>0$ 的解为 $0<x<\frac{1}{2}$，

∴ $a>\frac{1}{2e}$ 时，$[f(x)]_{\min}=f(\ln 2a)=-a[(\ln 2a)^2-2a+1]<0$，则 $\frac{1}{2e}<a<\frac{1}{2}$，

此时 $\ln 2a<\ln 1=0$，又 $f(x)$ 在 $(\ln 2a,+\infty)$ 上是增函数，∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数。

综上所述，当 $f(x)$ 存在小于零的极小值时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数。……………8分

说明：亦可以直接利用 $\ln x\le x-1$，得 $g'(x)=\frac{2(\ln 2x-x)}{x}=\frac{2(\ln 2+\ln x-x)}{x}\le\frac{2(\ln 2-1)}{x}<0$

（2）当 $x_1,x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\sin x_1>0$，$x_1\cos x_2>0$，

∴ $f(\sin x_1)<f(x_1\cos x_2)$ 等价于 $\sin x_1<x_1\cos x_2$。……………10分

（法1）设 $s(x)=\sin x-x\cos x$，则 $s'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$，

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$s'(x)>0$，$s(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

又 $s(0)=0$，∴ $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$s(x)>0$，即 $\sin x-x\cos x>0$，$\frac{\sin x}{x}>\cos x$，

∴ $\cos x_1<\frac{\sin x_1}{x_1}<\frac{x_1\cos x_2}{x_1}=\cos x_2$，

而 $x_1,x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$，且余弦函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 $x_1>x_2$。……………12分

（法2）设 $t(x)=\tan x-x$，则 $t'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x>0$，$t(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

又 $t(0)=0$，∴ $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$t(x)>0$，即 $\tan x-x>0$，$\frac{\sin x}{x}>\cos x$，

∴ $\cos x_1<\frac{\sin x_1}{x_1}<\frac{x_1\cos x_2}{x_1}=\cos x_2$，

而 $x_1,x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$，且余弦函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 $x_1>x_2$。……………12分

说明：本小题酌情给分。

关于我们