

决胜新高考——2023 届高三年级大联考

数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $(2-i)z = 3+4i$ ，则 $z + \bar{z} =$

A. 3

B. 4

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

2. 已知集合 $A = \left\{x \mid \lg x < \frac{1}{2}\right\}$ ， $B = \{x \mid 5x < 16\}$ ，则 $A \cap B =$

A. $\{x \mid 0 < x < \sqrt{10}\}$

B. $\{x \mid x < \sqrt{10}\}$

C. $\left\{x \mid x < \frac{16}{5}\right\}$

D. $\left\{x \mid 0 < x < \frac{16}{5}\right\}$

3. 把分别标有 1 号、2 号、3 号、4 号的 4 个不同的小球放入分别标有 1 号、2 号、3 号的 3 个盒子中，没有空盒子且任意一个小球都不能放入标有相同标号的盒子中，则不同的放球方法种数为

A. 8

B. 12

C. 16

D. 20

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4 = 4S_2$ ， $a_{2n} = 2a_n + 1$ 。设 $b_n = a_n$ ，则 $\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3}$

$$+\frac{1}{b_3b_4}+\cdots+\frac{1}{b_9b_{10}}=$$

- A. $\frac{9}{37}$ B. $\frac{18}{37}$ C. $\frac{9}{19}$ D. $\frac{9}{38}$

5. 苏格兰数学家纳皮尔 (J. Napier, 1550-1617) 发明的对数及对数表 (如下表), 为当时的天文学家处理“大数”的计算大大缩短了时间. 即就是任何一个正实数 N 可以表示成 $N = a \times 10^n (1 \leq a < 10, n \in \mathbf{Z})$, 则 $\lg N = n + \lg a (0 \leq \lg a < 1)$, 这样我们可以知道 N 的位数. 已知正整数 M^{31} 是 35 位数, 则 M 的值为

N	2	3	4	5	11	12	13	14	15
$\lg N$	0.30	0.48	0.60	0.70	1.04	1.08	1.11	1.15	1.18

- A. 3 B. 12 C. 13 D. 14

6. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右支交于点 A, B , 若 $\cos \angle AOB = -\frac{7}{25}$, 则 C 的离心率为

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{7}$

7. 若 $\tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} = 1$, 则 $\cos \alpha + \cos \beta =$

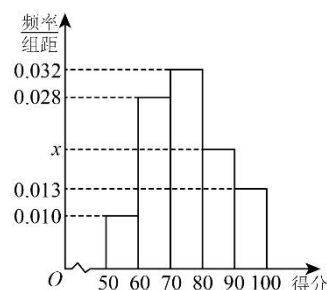
- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知 $a = e^{-0.1}$, $b = \ln \frac{10e}{11}$, $c = 0.1^{0.1}$, 则

- A. $b < c < a$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

- 二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某企业为普及法制教育, 对本单位 1500 名员工开展了一次法律知识竞赛答题活动. 现从中随机抽取 100 人的得分进行统计分析, 整理得到如图所示的频率分布直方图, 则根据该直方图, 下列结论正确的是



- A. 估计该企业 16% 的员工得分在区间 $[80, 90)$ 内
B. 该企业员工竞赛得分不小于 90 的人数估计为 195 人
C. 估计该企业员工的平均竞赛得分约为 74.5

D. 该企业员工竞赛得分的第 75 百分位数约为 83

10. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - \sqrt{3} \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π , 则

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

B. 直线 $x = -\frac{\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

D. 将 $f(x)$ 的图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到 $y = 2\sin 2x$ 的图象

11. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) + f(1-x) = 6$, $f(2+x) = f(2-x) + 2x$, 则

A. $f(1+x)$ 的图象关于 $(0, 3)$ 对称

B. 4 是 $f(x)$ 的一个周期

C. $f(1) = 3$

D. $\sum_{i=1}^{21} f(i) = 273$

12. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 经过点 F 的直线与抛物线 C 相交 A, B 两

点, A, B 在 l 上的射影分别为 A_1, B_1 , l 与 x 轴相交于点 M , 则下列说法正确的是

A. $A_1F \perp B_1F$

B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} > 0$

C. 若 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 则 $|\overrightarrow{AF}| = 3$

D. 若 $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QM}$, $|\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{BQ}|$, 则 $AF - BF = 4$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左, 右焦点, A 为 C 的上顶点, 过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D, E 两点, 则 $\triangle ADE$ 的周长为_____.

14. 若曲线 $y = x \ln x$ 有两条过 (e, a) 的切线, 则 a 的取值范围是_____.

15. 在平面直角坐标系中, 两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 间的“曼哈顿距离”定义为

$\|P_1P_2\| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, 则平面内与两定点 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$ 的“曼哈顿距离”之和等于 4 的点的轨迹围成的面积为_____.

16. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 1, $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 翻折, 当三棱锥 $D-ABC$ 表面积最大时, 其内切球表面积为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $(b - \sqrt{3}c)\sin B + c\sin C = a\sin A$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, $\angle DBC = \frac{\pi}{2}$, $c = 6$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_n = 2a_n + 3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中的任意不同的三项均不能构成等差数列.

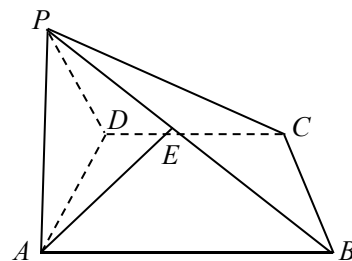
19. (12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2$, $AD = DC = CB = 1$, $PA = PD = \sqrt{2}$.

(1) 设平面 PAB 与平面 PCD 的交线为 l ,

求证: $l \parallel$ 平面 $ABCD$;

(2) 点 E 在棱 PB 上, 直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\frac{\pi}{6}$, 求点 E 到平面 PCD 的距离.



20. (12 分)

为了进一步深入开展打造“书香校园”活动，让读书成为每位师生的习惯，努力培育师生人文素养，让阅读成为学校、家庭、社会的一种良好风气，现对我校 60 名师生阅读喜好进行调查，其中教师与学生的人数之比为1:2，教师中喜欢读文学类的人数占 $\frac{1}{2}$ ，学生中喜欢文学类的占 $\frac{3}{4}$ ，得到下面的列联表：

	教师	学生	合计
文学类			
理工类			
合计			

(1) 请将列联表补充完整，判断数据能否有 90%的把握认为教师与学生的阅读喜好存在差异.

(2) 若从学校随机抽取 11 人，用样本的频率估计概率，预测 11 人中喜欢阅读理工类的人数最有可能是多少？

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

参考数据：

$P(K^2 \geq k)$	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (12 分)

设抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F , P 是抛物线外一点, 直线 PA, PB 与抛物线 C 切于 A, B 两点, 过点 P 的直线交抛物线 C 于 D, E 两点, 直线 AB 与 DE 交于点 Q .

(1) 若 AB 过焦点 F , 且 $|FA| + |FB| = 4$, 求直线 AB 的倾斜角;

(2) 求 $\frac{|PQ|}{|PD|} + \frac{|PQ|}{|PE|}$ 的值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x+4}{e^x}$, $g(x) = \frac{1}{3}ax^3 - x^2 + 3x$.

(1) 求曲线 $y = f(x) - g(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程;

(2) 若 $f'(x) + g'(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.