

工作秘密 严禁外传  
擅自泄露 严肃追责

## 成都市 2019 级高中毕业班第一次诊断性检测

### 数 学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第 I 卷(选择题)1 至 2 页,第 II 卷(非选择题)2 至 4 页,共 4 页,满分 150 分,考试时间 120 分钟。

#### 注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用 0.5 毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

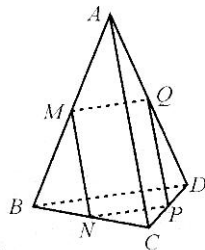
#### 第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合  $A = \{x \mid x^2 - x > 0\}$ ,  $B = \{x \mid e^x \geq 1\}$ , 则  $A \cap B =$   
(A)  $(-\infty, 1)$  (B)  $(-1, 1)$  (C)  $(1, +\infty)$  (D)  $[1, +\infty)$
2. 已知复数  $z = \frac{i}{2i-1}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $|z| =$   
(A)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$  (B)  $\frac{1}{5}$  (C)  $\frac{1}{25}$  (D)  $\sqrt{5}$
3. 函数  $f(x) = \sin x (\sin x + \cos x)$  的最小正周期是  
(A)  $\frac{\pi}{3}$  (B)  $\frac{\pi}{2}$  (C)  $\pi$  (D)  $2\pi$
4. 若实数  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ 3x + 2y - 5 \leq 0, \\ 2x - y + 1 \geq 0. \end{cases}$  则  $z = 3x + y$  的最大值为  
(A) -3 (B) 3 (C) -4 (D) 4
5. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB \perp BC$ ,  $AB = BC = 2$ . 现将  $\triangle ABC$  绕边  $AC$  旋转一周, 则所得到的旋转体的表面积是  
(A)  $2\pi$  (B)  $2\sqrt{2}\pi$  (C)  $3\sqrt{2}\pi$  (D)  $4\sqrt{2}\pi$
6. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一条渐近线方程为  $y = \sqrt{2}x$ , 则该双曲线的离心率为  
(A)  $\sqrt{5}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C) 2 (D) 3

数学(文科)“一诊”考试题 第 1 页(共 4 页)

7. 已知实数  $a, b$  满足  $\log_a 2 > \log_b 2 > 1$ , 则  
 (A)  $1 < a < 2 < b$  (B)  $1 < a < b < 2$   
 (C)  $1 < b < a < 2$  (D)  $a < 1 < b < 2$
8. 从 1, 2, 3, 4, 5 中随机抽取三个数, 则这三个数能成为一个三角形三边长的概率为  
 (A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{3}{10}$  (D)  $\frac{2}{5}$
9. 已知  $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$ , 则  $\frac{\sin \alpha}{1 - \tan \alpha}$  的值为  
 (A)  $-\frac{7\sqrt{2}}{60}$  (B)  $\frac{7\sqrt{2}}{60}$  (C)  $-\frac{7\sqrt{2}}{30}$  (D)  $\frac{7\sqrt{2}}{30}$
10. 四名同学各掷骰子 5 次, 并各自记录每次骰子出现的点数. 分别统计四名同学的记录结果, 可以判断出一定没有出现点数 6 的是  
 (A) 平均数为 3, 中位数为 2 (B) 中位数为 3, 众数为 2  
 (C) 中位数为 3, 方差为 2.8 (D) 平均数为 2, 方差为 2.4
11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & x > 0, \\ -3x^2 - x, & x \leq 0. \end{cases}$  若函数  $g(x) = f(x) - m$  ( $m \in \mathbf{R}$ ) 有三个不同的零点  $x_1, x_2, x_3$ , 则  $x_1 x_2 x_3$  的值为  
 (A) 0 (B)  $-\frac{1}{3}$  (C) 0 或  $-\frac{1}{3}$  (D) 0 或  $-\frac{1}{6}$
12. 如图, 已知三棱锥  $A-BCD$  的截面  $MNPQ$  平行于对棱  $AC, BD$ , 且  $\frac{AC}{BD} = m, \frac{AM}{MB} = n$ , 其中  $m, n \in (0, +\infty)$ . 有下列命题:  
 ① 对于任意的  $m, n$ , 都有截面  $MNPQ$  是平行四边形;  
 ② 当  $AC \perp BD$  时, 对任意的  $m$ , 都存在  $n$ , 使得截面  $MNPQ$  是正方形;  
 ③ 当  $m = 1$  时, 截面  $MNPQ$  的周长与  $n$  无关;  
 ④ 当  $AC \perp BD$ , 且  $AC = BD = 2$  时, 截面  $MNPQ$  的面积的最大值为 1.  
 其中假命题的个数为  
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



## 第 II 卷(非选择题, 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 曲线  $y = x^3 - x$  在点  $(2, 6)$  处的切线方程是\_\_\_\_\_.
14. 已知向量  $a, b$  满足  $a = (1, 1), a + 2b = (3, -1)$ , 则向量  $a$  与  $b$  的夹角为\_\_\_\_\_.
15. 已知斜率为  $-\frac{1}{3}$  且不经过坐标原点  $O$  的直线与椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$  相交于  $A, B$  两点,  $M$  为线段  $AB$  的中点, 则直线  $OM$  的斜率为\_\_\_\_\_.
16. 在  $\triangle ABC$  中, 已知角  $A = \frac{5\pi}{6}$ , 角  $A$  的平分线  $AD$  与边  $BC$  相交于点  $D$ ,  $AD = 2$ . 则  $AB + AC$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知等差数列  $\{a_n\}$  满足  $2a_2 + a_3 = 0, a_7 = 2a_4 - 2$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = 2^{a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和.

18. (本小题满分 12 分)

某项目的建设过程中,发现其补贴额  $x$  (单位:百万元)与该项目的经济回报  $y$  (单位:千万元)之间存在着线性相关关系,统计数据如下表:

补贴额 $x$ (单位:百万元)	2	3	4	5	6
经济回报 $y$ (单位:千万元)	2.5	3	4	4.5	6

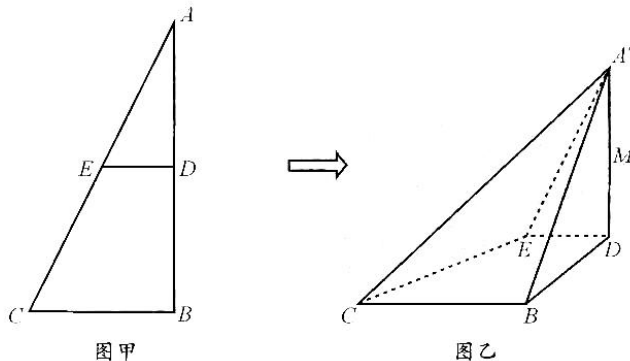
(I) 请根据上表所给的数据,求出  $y$  关于  $x$  的线性回归直线方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ;

(II) 请根据(I)中所得到的线性回归直线方程,预测当补贴额达到 8 百万元时该项目的经济回报.

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

19. (本小题满分 12 分)

如图甲,在直角三角形  $ABC$  中,已知  $AB \perp BC, BC=4, AB=8, D, E$  分别是  $AB, AC$  的中点.将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  折起,使点  $A$  到达点  $A'$  的位置,且  $A'D \perp BD$ ,连接  $A'B, A'C$ ,得到如图乙所示的四棱锥  $A'-DBCE$ ,  $M$  为线段  $A'D$  上一点.



(I) 证明:平面  $A'DB \perp$  平面  $DBCE$ ;

(II) 过  $B, C, M$  三点的平面与线段  $A'E$  相交于点  $N$ , 从下列三个条件中选择一个作为已知条件,求三棱锥  $A'-BCN$  的体积.

①  $BM = BE$ ; ② 直线  $EM$  与  $BC$  所成角的大小为  $45^\circ$ ; ③ 三棱锥  $M-BDE$  的体积是三棱锥  $E-A'BC$  体积的  $\frac{1}{4}$ .

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $C: y^2 = 2x$ , 过点  $A(2, 0)$  且斜率为  $k$  的直线与抛物线  $C$  相交于  $P, Q$  两点.

(I) 设点  $B$  在  $x$  轴上, 分别记直线  $PB, QB$  的斜率为  $k_1, k_2$ . 若  $k_1 + k_2 = 0$ , 求点  $B$  的坐标;

(II) 过抛物线  $C$  的焦点  $F$  作直线  $PQ$  的平行线与抛物线  $C$  相交于  $M, N$  两点, 求

$\frac{|MN|}{|AP| \cdot |AQ|}$  的值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \sin x - 2ax$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(I) 当  $a \geq \frac{1}{2}$  时, 求函数  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上的最值;

(II) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) \leq \cos x - 1$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上恒成立, 求  $a$  的取值范围.

请考生在第 22, 23 题中任选择一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时, 用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha, \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数). 以坐标原点  $O$  为

极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ .

(I) 求直线  $l$  的直角坐标方程与曲线  $C$  的普通方程;

(II) 已知点  $A$  的直角坐标为  $(-1, 3)$ , 直线  $l$  与曲线  $C$  相交于  $E, F$  两点, 求  $|AE| \cdot |AF|$  的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |x - 1| + 2|x + 1|$ .

(I) 求不等式  $f(x) < 5$  的解集;

(II) 设  $f(x)$  的最小值为  $m$ . 若正实数  $a, b, c$  满足  $a + 2b + 3c = m$ , 求  $3a^2 + 2b^2 + c^2$  的最小值.

成都市 2019 级高中毕业班第一次诊断性检测

## 数学一诊(文科)参考答案及评分意见

### 第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. A; 3. C; 4. D; 5. D; 6. B; 7. B; 8. C; 9. B; 10. D; 11. D; 12. A.

### 第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13.  $11x - y - 16 = 0$ ; 14.  $\frac{\pi}{2}$ ; 15.  $\frac{7}{3}$ ; 16.  $4\sqrt{6} + 4\sqrt{2}$ .

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I) 设  $\{a_n\}$  的首项为  $a_1$ , 公差为  $d$ . ……1 分

$$\text{由题意, 可得 } \begin{cases} 2a_1 + 2d + a_1 + 4d = 0 \\ a_1 + 6d - 2(a_1 + 3d) + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{……3 分}$$

$$\text{解得 } a_1 = 2, d = -1. \quad \text{……5 分}$$

$$\therefore a_n = -n + 3. \quad \text{……6 分}$$

$$\text{(II) 由 (I), 可得 } b_n = 2^{-n+3}. \quad \text{……9 分}$$

设数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ .

$$\therefore S_n = \frac{4(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{……11 分}$$

$$= 8(1 - \frac{1}{2^n}) = 8 - (\frac{1}{2})^{n-3}. \quad \text{……12 分}$$

$$18. \text{解: (I) } \because \bar{x} = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4, \bar{y} = \frac{2.5+3+4+4.5+6}{5} = 4, \quad \text{……1 分}$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-2) \times (-1.5) + (-1) \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 0.5 + 2 \times 2 = 8.5,$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10, \quad \text{……3 分}$$

$$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = 0.85, \hat{a} = 4 - 0.85 \times 4 = 0.6. \quad \text{……7 分}$$

$$\therefore \hat{y} = 0.85x + 0.6. \quad \text{……8 分}$$

数学(文科)“一诊”参考答案 第 1 页(共 5 页)

(II) 当  $x=8$  时,  $\hat{y}=0.85 \times 8 + 0.6 = 7.4$ .

$\therefore$  当补贴额达到 8 百万元时, 该项目的经济回报为 7.4 千万元. .....12 分

19. 解: (I)  $\because D, E$  分别为  $AB, AC$  的中点,  $\therefore DE \parallel BC$ .

$\because AD \perp BC, \therefore AD \perp DE$ .

$\therefore A'D \perp DE$ . .....2 分

$\because A'D \perp BD, DE \subset \text{平面 } BDEC, DB \subset \text{平面 } BDEC, DE \cap DB = D,$

$\therefore A'D \perp \text{平面 } BDEC$ . .....4 分

又  $A'D \subset \text{平面 } A'DB,$

$\therefore \text{平面 } A'DB \perp \text{平面 } BDEC$ . .....5 分

(II) 选①.

$\because BM = BE, \angle BDM = \angle BDE = 90^\circ,$

$\therefore \triangle BDM \cong \triangle BDE. \therefore DE = DM = 2.$

$\therefore M$  为  $A'D$  的中点. .....7 分

选②.

$\because BC \parallel DE,$

$\therefore$  直线  $EM$  与  $BC$  所成角为  $\angle MED$ .

又直线  $EM$  与  $BC$  所成角的大小为  $45^\circ, \therefore \angle MED = 45^\circ. \therefore A'D \perp DE$ .

$\therefore DE = DM = 2.$

$\therefore M$  为  $A'D$  的中点. .....7 分

选③.

$$\because V_{E-A'BC} = V_{A'-EBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle EBC} \cdot A'D, V_{M-BDE} = \frac{1}{3} S_{\triangle BDE} \cdot MD, V_{M-BDE} = \frac{1}{4} V_{E-A'BC},$$

$$\text{又 } DE = \frac{1}{2} BC, \text{ 即 } S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} S_{\triangle EBC}$$

$$\therefore A'D = 2MD.$$

$\therefore M$  为  $A'D$  的中点. .....7 分

$\because$  过  $B, C, M$  三点的平面与线段  $A'E$  相交于点  $N,$

$DE \parallel BC, BC \not\subset \text{平面 } A'DE,$

$\therefore BC \parallel \text{平面 } A'DE.$

又平面  $BMNC \cap \text{平面 } A'DE = MN,$

$\therefore BC \parallel MN.$

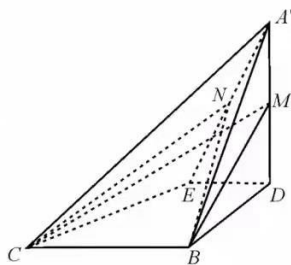
$\therefore N$  为  $A'E$  的中点. .....8 分

$\because V_{A'-BCN} = V_{N-A'BC},$  又  $MN \parallel \text{平面 } A'BC,$

$\therefore V_{N-A'BC} = V_{M-A'BC} = V_{C-A'BM},$  .....10 分

$$\text{易知 } BC \perp \text{平面 } A'BD. \therefore V_{C-A'BM} = \frac{1}{3} S_{\triangle A'BM} \cdot BC = \frac{1}{6} S_{\triangle A'BD} \cdot BC = \frac{1}{6} \times 8 \times 4 = \frac{16}{3}.$$

$\therefore$  三棱锥  $A'-BCN$  的体积为  $\frac{16}{3}$ . .....12 分



20. 解:(I)由题意,直线 PQ 的方程为  $y = k(x - 2)$ , 其中  $k \neq 0$ .

设  $B(m, 0)$ ,  $P(\frac{y_1^2}{2}, y_1)$ ,  $Q(\frac{y_2^2}{2}, y_2)$ .

由  $\begin{cases} y = k(x - 2), \\ y^2 = 2x \end{cases}$  消去  $x$ , 得  $y^2 - \frac{2}{k}y - 4 = 0$ .

$$\therefore \Delta = \frac{4}{k^2} + 16 > 0, y_1 + y_2 = \frac{2}{k}, y_1 y_2 = -4. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore k_1 + k_2 = 0,$$

$$\therefore \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2} - m} + \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2} - m} = 0, \text{ 即 } \frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{2} - m(y_1 + y_2) = 0. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore (\frac{-4}{2} - m) \cdot \frac{2}{k} = 0, \text{ 即 } (m + 2) \cdot \frac{2}{k} = 0. \therefore m = -2. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$\therefore$  点 B 的坐标为  $(-2, 0)$ . \dots\dots 6 分

(II)由题意,直线 MN 的方程为  $y = k(x - \frac{1}{2})$ . 设  $M(\frac{y_3^2}{2}, y_3)$ ,  $N(\frac{y_4^2}{2}, y_4)$ .

由  $\begin{cases} y = k(x - \frac{1}{2}), \\ y^2 = 2x \end{cases}$  消去  $x$ , 得  $y^2 - \frac{2}{k}y - 1 = 0$ .

$$\therefore \Delta = \frac{4}{k^2} + 4 > 0, y_3 + y_4 = \frac{2}{k}, y_3 y_4 = -1. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_3 - y_4| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_3 + y_4)^2 - 4y_3 y_4} = 2(1 + \frac{1}{k^2}). \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又 } |AP| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_1|, |AQ| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_2|,$$

$$\therefore |AP| \cdot |AQ| = (1 + \frac{1}{k^2}) |y_1 y_2| = 4(1 + \frac{1}{k^2}). \quad \dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{|MN|}{|AP| \cdot |AQ|} = \frac{2(1 + \frac{1}{k^2})}{4(1 + \frac{1}{k^2})} = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解:(I)由题意,  $f'(x) = \cos x - 2a$ . \dots\dots 1 分

$\therefore 2a \geq 1, \therefore$  当  $x \in [0, \pi]$  时,  $f'(x) \leq 0$  恒成立.

$\therefore f(x)$  在  $[0, \pi]$  上单调递减. \dots\dots 2 分

$\therefore$  当  $x = 0$  时,  $f(x)$  取得最大值为 0; 当  $x = \pi$  时,  $f(x)$  取得最小值为  $-2a\pi$ . \dots\dots 4 分

(II)不等式  $f(x) \leq \cos x - 1$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上恒成立,

20. 解:(I)由题意,直线 PQ 的方程为  $y = k(x - 2)$ , 其中  $k \neq 0$ .

设  $B(m, 0)$ ,  $P(\frac{y_1^2}{2}, y_1)$ ,  $Q(\frac{y_2^2}{2}, y_2)$ .

由  $\begin{cases} y = k(x - 2), \\ y^2 = 2x \end{cases}$  消去  $x$ , 得  $y^2 - \frac{2}{k}y - 4 = 0$ .

$$\therefore \Delta = \frac{4}{k^2} + 16 > 0, y_1 + y_2 = \frac{2}{k}, y_1 y_2 = -4. \quad \dots\dots 2 \text{分}$$

$$\therefore k_1 + k_2 = 0,$$

$$\therefore \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2} - m} + \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2} - m} = 0, \text{即} \frac{y_1 y_2 (y_1 + y_2)}{2} - m(y_1 + y_2) = 0. \quad \dots\dots 4 \text{分}$$

$$\therefore (\frac{-4}{2} - m) \cdot \frac{2}{k} = 0, \text{即} (m + 2) \cdot \frac{2}{k} = 0. \therefore m = -2. \quad \dots\dots 5 \text{分}$$

$\therefore$  点 B 的坐标为  $(-2, 0)$ . .....6分

(II)由题意,直线 MN 的方程为  $y = k(x - \frac{1}{2})$ . 设  $M(\frac{y_3^2}{2}, y_3)$ ,  $N(\frac{y_4^2}{2}, y_4)$ .

由  $\begin{cases} y = k(x - \frac{1}{2}), \\ y^2 = 2x \end{cases}$  消去  $x$ , 得  $y^2 - \frac{2}{k}y - 1 = 0$ .

$$\therefore \Delta = \frac{4}{k^2} + 4 > 0, y_3 + y_4 = \frac{2}{k}, y_3 y_4 = -1. \quad \dots\dots 8 \text{分}$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_3 - y_4| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \sqrt{(y_3 + y_4)^2 - 4y_3 y_4} = 2(1 + \frac{1}{k^2}). \quad \dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{又} |AP| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_1|, |AQ| = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |y_2|,$$

$$\therefore |AP| \cdot |AQ| = (1 + \frac{1}{k^2}) |y_1 y_2| = 4(1 + \frac{1}{k^2}). \quad \dots\dots 11 \text{分}$$

$$\therefore \frac{|MN|}{|AP| \cdot |AQ|} = \frac{2(1 + \frac{1}{k^2})}{4(1 + \frac{1}{k^2})} = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots 12 \text{分}$$

21. 解:(I)由题意,  $f'(x) = \cos x - 2a$ . .....1分

$\therefore 2a \geq 1, \therefore$  当  $x \in [0, \pi]$  时,  $f'(x) \leq 0$  恒成立.

$\therefore f(x)$  在  $[0, \pi]$  上单调递减. .....2分

$\therefore$  当  $x = 0$  时,  $f(x)$  取得最大值为 0; 当  $x = \pi$  时,  $f(x)$  取得最小值为  $-2a\pi$ . .....4分

(II)不等式  $f(x) \leq \cos x - 1$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上恒成立,



即  $2a \geq \frac{\sin x - \cos x + 1}{x}$  在区间  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上恒成立. ……5分

设  $g(x) = \frac{\sin x - \cos x + 1}{x}, x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

则  $g'(x) = \frac{x \cos x + x \sin x - \sin x + \cos x - 1}{x^2}$ . ……6分

设  $h(x) = x \cos x + x \sin x - \sin x + \cos x - 1$ ,

则  $h'(x) = -x \sin x + x \cos x = x(\cos x - \sin x)$ . ……8分

$\because x \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \therefore \sin x > 0, \cos x < 0$ , 即  $h'(x) < 0$ .

$\therefore$  函数  $h(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减.

$\because h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 2 < 0, \therefore$  当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时,  $h(x) < 0$ , 即  $g'(x) < 0$ .

$\therefore$  函数  $g(x)$  在  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  上单调递减. ……10分

$\because$  当  $x = \frac{\pi}{2}$  时,  $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}$ . ……11分

$\therefore$  当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  时, 有  $g(x) < \frac{4}{\pi}$ .

$\therefore a \geq \frac{2}{\pi}$ .

$\therefore a$  的取值范围是  $[\frac{2}{\pi}, +\infty)$ . ……12分

22. 解: (I) 由曲线  $C$  的参数方程, 消去参数  $\alpha$ , 得曲线  $C$  的普通方程为

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1. \quad \text{……2分}$$

$\because \rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y, \therefore$  直线  $l$  的直角坐标方程为

$$x + y - 2 = 0. \quad \text{……4分}$$

(II) 设直线  $l$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}). \quad \text{……6分}$$

将直线  $l$  的参数方程代入曲线  $C$  的普通方程, 整理可得

$$t^2 + 4\sqrt{2}t + 7 = 0. \quad \text{……7分}$$

$$\Delta = (4\sqrt{2})^2 - 4 \times 7 = 4 > 0.$$

设  $t_1, t_2$  是方程(\*)的两个实数根.

$$\therefore t_1 + t_2 = -4\sqrt{2}, t_1 t_2 = 7. \quad \text{……9分}$$

$$\therefore |AE| \cdot |AF| = |t_1 t_2| = 7. \quad \text{……10分}$$

数学(文科)“一诊”参考答案 第4页(共5页)

23. 解:(I)①当  $x \geq 1$  时,  $f(x) = (x-1) + 2(x+1) = 3x+1$ .
- 由  $f(x) < 5$ , 解得  $x < \frac{4}{3}$ . 此时  $1 \leq x < \frac{4}{3}$ ; .....1分
- ②当  $-1 < x < 1$  时,  $f(x) = -(x-1) + 2(x+1) = x+3$ .
- 由  $f(x) < 5$ , 解得  $x < 2$ . 此时  $-1 < x < 1$ ; .....2分
- ③当  $x \leq -1$  时,  $f(x) = -(x-1) - 2(x+1) = -3x-1$ .
- 由  $f(x) < 5$ , 解得  $x > -2$ . 此时  $-2 < x \leq -1$ . .....3分
- 综上, 原不等式的解集为  $(-2, \frac{4}{3})$ . .....4分
- (II)由(I), 得  $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \geq 1 \\ x+3, & -1 < x < 1 \\ -3x-1, & x \leq -1 \end{cases}$  .....5分
- 当  $x = -1$  时,  $f(x)$  取得最小值 2.
- $\therefore m = 2$ . .....6分
- $\therefore a + 2b + 3c = 2$ .
- 由柯西不等式, 得  $(3a^2 + 2b^2 + c^2)(\frac{1}{3} + 2 + 9) \geq (a + 2b + 3c)^2 = 4$ . .....8分
- $\therefore 3a^2 + 2b^2 + c^2 \geq \frac{6}{17}$ . .....9分
- 当且仅当  $\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{2}} = \frac{c}{3}$ , 即  $a = \frac{1}{17}, b = \frac{3}{17}, c = \frac{9}{17}$  时, 等号成立.
- $\therefore 3a^2 + 2b^2 + c^2$  的最小值为  $\frac{6}{17}$ . .....10分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

