

2018—2019 学年度高三教学质量检测

数学(理工类) 试题

2019.01

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并收回.

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案, 不能答在试卷上.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$, $B = \{x | x^2 \leq 4\}$, 则 $A \cap B$ 为
A. $[-2, 3)$ B. $[-1, 3)$ C. $[-1, 2]$ D. $(-1, 2]$
2. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $a_5 = 9$, 则 a_8 的值是
A. 15 B. 16 C. 17 D. 18
3. 抛物线 $y = 4x^2$ 的准线方程是
A. $y = -\frac{1}{16}$ B. $y = \frac{1}{16}$ C. $x = 1$ D. $x = -1$
4. 设 m, n 是不同的直线, α, β 是不同的平面, 下列命题中正确的是
A. 若 $m // \alpha, n \perp \beta, m // n$, 则 $\alpha // \beta$
B. 若 $m // \alpha, n \perp \beta, m \perp n$, 则 $\alpha // \beta$
C. 若 $m // \alpha, n \perp \beta, m // n$, 则 $\alpha \perp \beta$
D. 若 $m // \alpha, n \perp \beta, m \perp n$, 则 $\alpha \perp \beta$
5. 圆 $C_1: x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 与圆 $C_2: (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 的公切线的条数为
A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
6. 已知向量 a, b 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 且 $a = (3, -4)$, $|b| = 2$, 则 $|2a + b| =$
A. $2\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{21}$ D. 84

7. 下列说法正确的是

- A. 若命题 $p, \neg q$ 均为真命题, 则命题 $p \wedge q$ 为真命题
- B. “若 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 则 $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ” 的否命题是“若 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 则 $\sin\alpha \neq \frac{1}{2}$ ”
- C. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $C = \frac{\pi}{2}$ ” 是 “ $\sin A = \cos B$ ” 的充要条件
- D. 命题 p : “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 - 5 > 0$ ” 的否定为 $\neg p$: “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 5 \leq 0$ ”

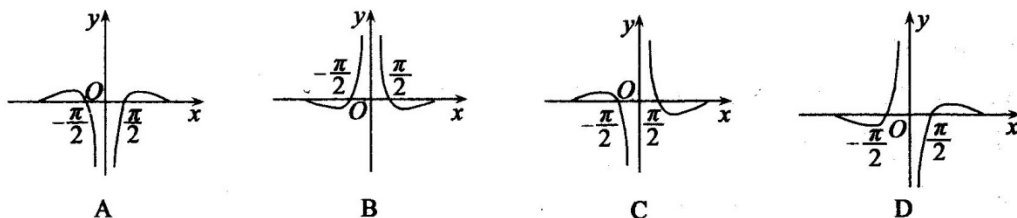
8. 为得到函数 $y = 2\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6})$ 的图象, 只需把函数 $y = 2\cos x$ 的图象上所有的点

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)
- B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ 倍 (纵坐标不变)
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)
- D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再把所得各点的横坐标伸长到原来的 3 倍 (纵坐标不变)

9. 已知定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(1-x)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x - m$, 则 $f(2019) =$

- A. 1
- B. -1
- C. 2
- D. -2

10. 函数 $f(x) = \frac{\cos x}{x - \sin x}, x \in [-\frac{3\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{3\pi}{2}]$ 的图象大致是



11. 已知函数 $f(x) = \log_a(x+3) - 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx + ny + 4 = 0$ 上, 其中 $mn > 0$, 则 $\frac{1}{m+1} + \frac{2}{n}$ 的最小值为

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{4}{3}$
- C. 2
- D. 4

12. 已知 $m > 0$, 若函数 $f(x) = m \ln x - \frac{1}{2}x^2 + mx$ 有且只有一个零点, 则实数 $m =$

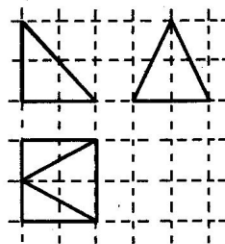
- A. $\frac{1}{4}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{3}{4}$
- D. 1

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 2x - y \leq 2 \\ x - y \geq -2 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$$
 则 $z = x - 2y$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

14. 如图,网格纸上小正方形的边长为 1,粗实线画出的是某多面体的三视图,则该多面体的表面积为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.



15. 曲线 $y = e^x$ 与其在点 $(0, 1)$ 处的切线及直线 $x = 1$ 所围成的封闭图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A ,以 A 为圆心,

以 b 为半径的圆与双曲线 C 的渐近线 $bx - ay = 0$ 交于 M, N 两点.若 $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{ON}$ (O 为坐标原点),则双曲线 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \sin x \cos(x + \frac{\pi}{6})$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ 时,求函数 $f(x)$ 的值域.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,向量 $p = (2, S_n), q = (1, a_n - 1)$,且 p 和 q 共线.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$,且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,求证: $T_n < \frac{1}{3}$.

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A, \cos B = \frac{1}{7}$.

(I) 求 $a : b : c$;

(II) 若 BD 为 AC 边的中线,且 $BD = \sqrt{21}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

20. (本小题满分 12 分)

如图 1, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 1$, $AD = 2$, 以对角线 BD 为折痕把 $\triangle BCD$ 折起, 使点 C 到图 2 所示点 P 的位置, 使得 $PA = \sqrt{5}$.

(I) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PBD ;

(II) 求二面角 $B-PA-D$ 的余弦值.

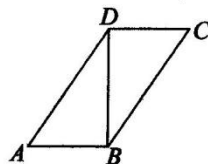


图1

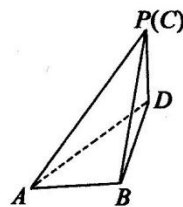


图2

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $P(2, 1)$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 若 A, B 是椭圆 C 上的两个动点, 且 $\angle APB$ 的角平分线总垂直于 x 轴, 求证: 直线 AB 的斜率为定值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $a = 1$, 记函数 $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}x^2 - bx$, 设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点,

且 $b \geq e + \frac{1}{e}$, 求 $g(x_1) - g(x_2)$ 的最小值.