参考答案及解析

理科数学

一、选择题

1. C 【解析】由题意得 $A=\{x\mid -|x|+2\geqslant 0\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y\mid y=(x-1)^2+1\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$，所以 $A\cap B=[1,2]$.

2. A 【解析】由题意得 $\bar{z}=\frac{9+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\frac{(9+3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\frac{9-18\mathrm{i}+3\mathrm{i}+6}{5}=3-3\mathrm{i}$，则 $z=3+3\mathrm{i}$，所以 z 在复平面内对应的点为 $(3,3)$，位于第一象限.

3. A 【解析】若 $a>1>b$，则 $a-1>0$，$b-1<0$，所以 $(a-1)(b-1)<0$，所以 $ab+1<a+b$，所以 p 是 q 的充分条件；若 $ab+1<a+b$，不妨取 $a=\frac{1}{2}$，$b=5$，不满足 $a>1>b$，所以 p 不是 q 的必要条件，故 p 是 q 的充分不必要条件.

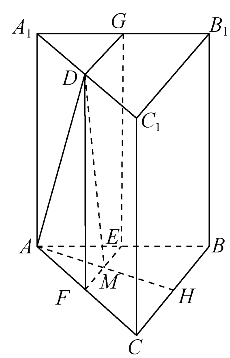
4. D 【解析】由题意得 $\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)=7\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)$. 令 $A=\sin(\alpha+15^\circ)\cos(\alpha-15^\circ)$，$B=\cos(\alpha+15^\circ)\sin(\alpha-15^\circ)$，则 $A=7B$　①. 又 $A-B=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$　②，所以联立①②，解得 $A=\frac{7}{12}$，$B=\frac{1}{12}$，故 $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)=\frac{1}{12}$.

5. C 【解析】对于选项 A，R&D 经费总量的平均数为 $\frac{1}{7}\times(15\ 677+17\ 606+19\ 678+22\ 144+24\ 393+27\ 956+30\ 870)\approx 22\ 617.7$，所以 A 错误；对于选项 B，R&D 经费总量的中位数为 22 144 亿元，所以 B 错误；对于选项 C，R&D 经费与 GDP 之比的极差为 $2.55\%-2.10\%=0.45\%$，所以 C 正确；对于选项 D，R&D 经费与 GDP 之比增幅最大的是 2019 年到 2020 年，所以 D 错误.

6. A 【解析】由题意得 $a_{n+1}-a_n=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，则当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+2\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+2\left(1-\frac{1}{2}\right)-1=1-\frac{2}{n}$，当 $n=1$ 时也满足上式，所以 $a_n=1-\frac{2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $b_1=\langle -1\rangle=-1$，$b_2=\langle 0\rangle=0$，$b_3=\langle 1-\frac{2}{3}\rangle=1$，$b_4=\langle 1-\frac{2}{4}\rangle=1$，$b_5=b_6=\cdots=1$，故 $\{b_n\}$ 的前 2 023 项和为 $-1+0+1+1+\cdots+1=2\ 020$.

7. C 【解析】第一次循环：$a=0+1=1$，$S=0+1=1$，不满足输出条件，$i=2$；第二次循环：$a=1+2=3$，$S=1+3=4$，不满足输出条件，$i=3$；第三次循环：$a=3+3=6$，$S=4+6=10$，不满足输出条件，$i=4$；第四次循环：$a=6+4=10$，$S=10+10=20$，不满足输出条件，$i=5$；第五次循环：$a=10+5=15$，$S=20+15=35$，不满足输出条件，$i=6$；第六次循环：$a=15+6=21$，$S=35+21=56$，满足输出条件，退出循环. 所以判断框中的条件可填入“$i<6$”.

8. A 【解析】如图所示，分别取棱 AB，AC，BC，A_1B_1 的中点 E，F，H，G，连接 EF，DF，DG，EG，AH，设 $AH\cap EF=M$，连接 DM，则易知平面 $EFDG$ // 平面 B_1BCC_1. 又因为 H 为 BC 的中点，所以 $AH\perp BC$，易知 $AH\perp$ 平面 B_1BCC_1，从而 $AH\perp$ 平面 $EFDG$，因此 $AM\perp$ 平面 $EFDG$，则 $\angle ADM$ 即为 AD 与平面 $EFDG$ 所成的角，且等于直线 AD 与平面 B_1BCC_1 所成的角. 设 $AB=a$，则 $AA_1=2a$，$AD=\frac{\sqrt{17}}{2}a$，$AM=\frac{1}{2}AH=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，所以 $\sin\angle ADM=\frac{AM}{AD}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{\frac{\sqrt{17}}{2}a}=\frac{\sqrt{51}}{34}$，所以直线 AD 与平面 B_1BCC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{51}}{34}$.

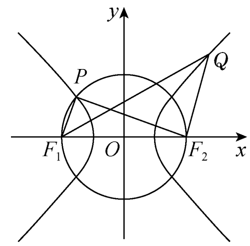


9. B 【解析】因为 $a=\log_4 8=\frac{3}{2}$，$b=\frac{\mathrm{e}^2}{4}>\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，所以 $b>a$. 令函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$，所以 $f'(x)=\frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{x^3}$，所以 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\frac{\mathrm{e}^{2\ 023}}{2\ 023^2}>\frac{\mathrm{e}^2}{4}$，即 $c>b$，所以 $c>b>a$.

10. C 【解析】因为 $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=$

$\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=0$，所以 $f(n)$ 单调递减，则 $f(1\,600)>\gamma\approx0.577\,2$，即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,600}>0.577\,2+\ln 1\,600\approx7.955$.因为 $g(n+1)-g(n)=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}=0$，所以 $g(n)$ 单调递增，则当 n 趋近于 $+\infty$ 时，$g(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n+[\ln n-\ln(n+1)]<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\approx0.577\,2$，所以 $g(1\,599)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,599}-\ln 1\,600<0.577\,2$，所以 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,600}<\ln 1\,600+\frac{1}{1\,600}+0.577\,2<\ln 1\,600+\frac{1}{1\,000}+0.577\,2\approx7.377\,8+0.001+0.577\,2=7.956$，故 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1\,600}$ 所在的区间为 $(7.5,8)$.

11. A 【解析】如图，连接 PF_2，QF_1，由题意知 $|F_1F_2|=2c$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$，设 $\angle PF_1F_2=\varphi$，$|PF_1|=m$，由双曲线的定义可得 $|PF_2|=2a+m$.又由题可得 $PF_1\perp PF_2$，所以 $m^2+(2a+m)^2=4c^2$，即 $m^2=2b^2-2am$.在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1PF_2$ 中，$\cos\angle PF_1F_2=\cos\varphi=\frac{m}{2c}$，由 $\overrightarrow{F_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$，得 $|F_2Q|=\frac{3m}{2}$，由双曲线的定义可得 $|F_1Q|=2a+\frac{3m}{2}$.因为 $\overrightarrow{F_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$，所以 $F_1P\parallel F_2Q$，所以 $\angle QF_2F_1=\pi-\varphi$，在 $\triangle F_1F_2Q$ 中，$\cos\angle QF_2F_1=-\cos\varphi=-\frac{m}{2c}$，又由余弦定理可得 $|QF_1|^2=|QF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|QF_2|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos\angle QF_2F_1$，即 $\left(2a+\frac{3m}{2}\right)^2=\left(\frac{3m}{2}\right)^2+(2c)^2-2\cdot\frac{3m}{2}\cdot2c\cdot\left(-\frac{m}{2c}\right)$，所以 $6am=4b^2+3m^2$.又因为 $m^2=2b^2-2am$，所以 $b=\sqrt{3}\,m$，$a=\frac{5}{2}m$，所以 $c^2=a^2+b^2=\frac{37}{4}m^2$，故 $c=\frac{\sqrt{37}}{2}m$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{37}}{2}m}{\frac{5}{2}m}=\frac{\sqrt{37}}{5}$.



12. B 【解析】令 $f(x)=0$，得 $x^3+(m-1)x^2+(n-m-1)x-n+1=0$，所以 $x^3-x^2+mx^2-mx+(n-1)x-(n-1)=0$，所以 $x^2(x-1)+mx(x-1)+(n-1)(x-1)=0$，所以 $(x-1)(x^2+mx+n-1)=0$，则 $x=1$ 或 $x^2+mx+n-1=0$.由题意得方程 $x^2+mx+n-1=0$ 在区间 $(-1,1)$ 内有两个不同的实数根，设两根分别为 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，则 $\Delta=m^2-4(n-1)>0$，$x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=n-1$，所以 $m=-(x_1+x_2)$，$n=x_1x_2+1$，所以 $m^2-n^2=(x_1+x_2)^2-(x_1x_2+1)^2=x_1^2+x_2^2-x_1^2x_2^2-1=-(x_1^2-1)(x_2^2-1)$.因为 $x_1,x_2\in(-1,1)$，所以 $0\leqslant x_1^2<1$，$0\leqslant x_2^2<1$，所以 $-1\leqslant x_1^2-1<0$，$-1\leqslant x_2^2-1<0$.又 $x_1\neq x_2$，所以 $-1<-(x_1^2-1)(x_2^2-1)<0$，即 m^2-n^2 的取值范围是 $(-1,0)$.

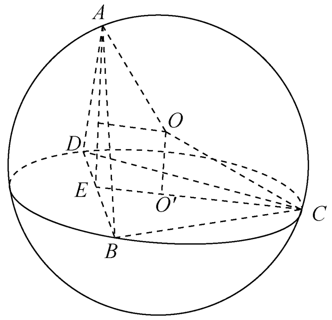
二、填空题

13. $\frac{1}{3}$ 【解析】因为 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-10\boldsymbol{b}^2=-7-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{22}{3}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}$.又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是单位向量，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3}$.

14. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ 【解析】连接 OM，CN，OC，则 $OM\perp AB$，$CN\perp DE$.过点 C 作 $CF\perp OM$，垂足为点 F，则四边形 $CNMF$ 为矩形，所以 $|CF|=|MN|$，$|CN|=|MF|$.又 $|OM|=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$|CN|=\frac{|2-3+4|}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，所以 $|OF|=|OM|-|MF|=|OM|-|CN|=\frac{\sqrt{5}}{5}$.又 $|OC|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，所以 $|MN|=|CF|=\sqrt{|OC|^2-|OF|^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

15. $\frac{20\pi}{3}$ 【解析】如图，设 $AC\cap BD=E$，因为四边形 $ABCD$ 为菱形，$A=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，所以 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ABD$ 均是边长为 2 的等边三角形，则 $AE=EC=\sqrt{3}$.因为翻折后点 A 到平面 BCD 的距离最大，所以平面 $ABD\perp$ 平面 BCD.设 $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心为 O'，四面体 $ABCD$ 的外接球的球心为 O，则 $OO'\perp$ 平面 BCD，且 $O'C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$O'E=\frac{\sqrt{3}}{3}$.设 $OO'=h$，则

$(\sqrt{3}-h)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=h^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$，解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以外接球的半径 $R=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=\frac{20\pi}{3}$.



16. $4-8\ln 2$【解析】由 $f(x)=\frac{1}{2}(x+4)e^x$，得 $f'(x)=\frac{1}{2}(x+5)e^x$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.因为 $g(x)=x[\ln(2x)+4]=\frac{1}{2}e^{\ln(2x)}[\ln(2x)+4]=f(\ln(2x))$，所以 $f(x_1)=g(x_2)=a$，即 $f(x_1)=f(\ln(2x_2))=a$.又 $a>2$，且易知当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant 2$，所以 $x_1=\ln(2x_2)$，所以 $2x_2=e^{x_1}$，所以 $x_1x_2+4x_2-4\ln a=(x_1+4)x_2-4\ln a=\frac{1}{2}(x_1+4)e^{x_1}-4\ln a=a-4\ln a$.令 $m(a)=a-4\ln a$，$a>2$，所以 $m'(a)=1-\frac{4}{a}=\frac{a-4}{a}$，当 $a\in(2,4)$ 时，$m'(a)<0$，$m(a)$ 单调递减；当 $a\in(4,+\infty)$ 时，$m'(a)>0$，$m(a)$ 单调递增，所以当 $a=4$ 时，$m(a)$ 取得最小值 $m(4)=4-8\ln 2$，故 $x_1x_2+4x_2-4\ln a$ 的最小值为 $4-8\ln 2$.

三、解答题

17. **解**：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 $a_3=5$，得 $a_1+2d=5$.　　(1分)

因为 $S_6=(a_2+1)S_3$，

所以 $6a_1+15d=(a_1+d+1)(3a_1+3d)$，

整理得 $2(a_1+2d)+d=(a_1+2d+1-d)(a_1+2d-d)$，　　(3分)

所以 $10+d=(6-d)(5-d)$，即 $d^2-12d+20=0$，

解得 $d=2$ 或 $d=10$.

当 $d=2$ 时，$a_1=1$，所以 $a_2=a_1+d=3>0$，符合题意；

当 $d=10$ 时，$a_1=-15$，所以 $a_2=a_1+d=-5<0$，不符合题意，舍去，　　(4分)

所以 $a_n=2n-1$.　　(5分)

(2)由(1)知 $S_n=\frac{(2n-1+1)n}{2}=n^2$，则 $\frac{n+S_n}{3^n}=\frac{n^2+n}{3^n}$，　　(6分)

所以 $T_n=\frac{1^2+1}{3}+\frac{2^2+2}{3^2}+\frac{3^2+3}{3^3}+\cdots+\frac{n^2+n}{3^n}$，

则 $\frac{1}{3}T_n=\frac{1^2+1}{3^2}+\frac{2^2+2}{3^3}+\frac{3^2+3}{3^4}+\cdots+\frac{n^2+n}{3^{n+1}}$，　　(7分)

两式相减，得 $\frac{2}{3}T_n=2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}\right)-\frac{n^2+n}{3^{n+1}}$.

令 $P_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^n}$，

则 $\frac{1}{3}P_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\frac{4}{3^5}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$，　　(9分)

两式相减，得 $\frac{2}{3}P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{2n+3}{2\times 3^{n+1}}$，

所以 $P_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times 3^n}$，

所以 $\frac{2}{3}T_n=2\times\left(\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times 3^n}\right)-\frac{n^2+n}{3^{n+1}}$，

所以 $T_n=\frac{9}{4}-\frac{2n+3}{4\times 3^{n-1}}-\frac{n^2+n}{2\times 3^n}=\frac{9}{4}-\frac{2n^2+8n+9}{4\times 3^n}$.　　(12分)

18. **解**：(1)由直方图可知 $(0.008+0.016+0.020+a+0.044+0.040+0.028+0.008)\times 5=1$，

解得 $a=0.036$.　　(2分)

因为 $(0.008+0.016+0.02+0.036)\times 5=0.4<0.5$，$(0.008+0.016+0.02+0.036+0.044)\times 5=0.62>0.5$，

所以学员该项技能的评价指标的中位数在 $[80,85)$ 内.

设学员该项技能的评价指标的中位数为 m，则 $(m-80)\times 0.044+0.4=0.5$，

解得 $m\approx 82.3$.　　(5分)

(2)由题意可知抽取的12名学员中该项技能的评价指标在 $[70,75)$ 内的有4名，在 $[85,90)$ 内的有8名.

由题意可知 X 的所有可能取值为0，1，2，3，4.　　(6分)

$P(X=0)=\frac{C_8^5}{C_{12}^5}=\frac{7}{99}$，

$P(X=1)=\frac{C_8^4C_4^1}{C_{12}^5}=\frac{35}{99}$，

$P(X=2)=\frac{C_8^3C_4^2}{C_{12}^5}=\frac{14}{33}$，

$P(X=3)=\frac{C_8^2C_4^3}{C_{12}^5}=\frac{14}{99}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_8^1C_4^4}{C_{12}^5}=\dfrac{1}{99}$，　　　　　　　　　　（8分）

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$

（10分）

$E(X)=0\times\dfrac{7}{99}+1\times\dfrac{35}{99}+2\times\dfrac{14}{33}+3\times\dfrac{14}{99}+4\times\dfrac{1}{99}=\dfrac{5}{3}$.

（12分）

19. (1)**证明**:如图,取 PC,PD 的中点分别为 E,F,连接 BE,AF,EF,CF,

所以 $EF /\!/ CD$,且 $EF=\dfrac{1}{2}CD$.

又 $AB /\!/ CD,CD=2AB$,

所以 $EF /\!/ AB$,且 $EF=AB$,

所以四边形 $ABEF$ 为平行四边形,

所以 $AF /\!/ BE$.　　　　　　　　　　（2分）

因为 $AP=AD,PF=DF$,所以 $AF\perp PD$.

因为 $CP\perp CD,PF=DF$,所以 $CF=DF=PF$.

又 $AP=AC$,所以 $\triangle PAF\cong\triangle CAF$,

所以 $\angle CFA=\angle PFA=90°$,即 $AF\perp CF$.

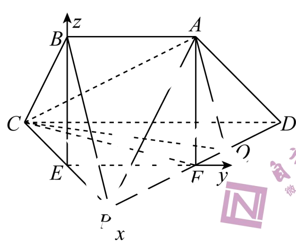
又 $PD\cap CF=F,PD,CF\subset$ 平面 PCD,

所以 $AF\perp$ 平面 PCD,　　　　　　　　　　（3分）

所以 $BE\perp$ 平面 PCD.

又 $BE\subset$ 平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$ 平面 PCD.

（4分）



(2)**解**:由(1)知,$BE\perp$ 平面 PCD,因为 $EF,CP\subset$ 平面 PCD,所以 $BE\perp EF,BE\perp CP$,所以 $\angle BEC=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 中,$CE=\dfrac{1}{2}CP=1,BC=\sqrt{2}$,则 $BE=\sqrt{BC^2-CE^2}=1$,则 $AF=1$.　　　　　　　　　　（6分）

因为 $CP\perp CD,EF /\!/ CD$,所以 $EF\perp CP$,

所以 CP,EF,BE 两两垂直.

以 E 为坐标原点,向量 $\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EB}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,1,1),B(0,0,1),P(1,0,0),C(-1,0,0),D(-1,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{BA}=(0,1,0),\overrightarrow{BP}=(1,0,-1),\overrightarrow{CA}=(1,1,1),\overrightarrow{CD}=(0,2,0),\overrightarrow{DP}=(2,-2,0)$.

由 $\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DP},\lambda\in[0,1]$,得 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DQ}=\overrightarrow{CD}+\lambda\overrightarrow{DP}=(0,2,0)+\lambda(2,-2,0)=(2\lambda,2-2\lambda,0)$.（7分）

设平面 ABP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y_1=0,\\ x_1-z_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$,则 $z_1=1$,得平面 ABP 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$.　　　　　　　　　　（8分）

设平面 ACQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CQ}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_2+y_2+z_2=0,\\ 2\lambda x_2+(2-2\lambda)y_2=0.\end{cases}$

取 $x_2=1-\lambda$,则 $y_2=-\lambda,z_2=2\lambda-1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1-\lambda,-\lambda,2\lambda-1)$.　　　　　　　　　　（10分）

设平面 ABP 与平面 ACQ 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$

$=\dfrac{|1\times(1-\lambda)+0\times(-\lambda)+1\times(2\lambda-1)|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\times\sqrt{(1-\lambda)^2+(-\lambda)^2+(2\lambda-1)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

故 λ 的值为 $\dfrac{1}{3}$.　　　　　　　　　　（12分）

20. **解**:(1)由题意得 $2a=2\times2b$,即 $a=2b$　①.　　（2分）

当点 P 为 C 的上顶点或下顶点时,$\triangle ABP$ 的面积取得最大值,所以 $\dfrac{1}{2}\times2b\times a=8$,即 $ab=8$　②.

联立①②,得 $a=4,b=2$.

故 C 的方程为 $\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1$.　　　　　　　　　　（4分）

(2)$\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值.

由(1)可得 $A(-2,0),B(2,0)$,由题意设直线 $l:x=my+1,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{y^2}{16}+\dfrac{x^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(4m^2+1)y^2+8my-12=0$,

则 $\Delta=64m^2+48(4m^2+1)>0$,

$y_1+y_2=-\dfrac{8m}{4m^2+1},y_1y_2=-\dfrac{12}{4m^2+1}$,　　　　　　　　　　（6分）

所以 $my_1y_2=\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$.　　　　　　　　　　（8分）

直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,令 $x=4$,得 $y=\dfrac{6y_1}{x_1+2}$,即 $D\left(4,\dfrac{6y_1}{x_1+2}\right)$.

同理可得 $E\left(4,\dfrac{2y_2}{x_2-2}\right)$.　　　　　　　　　　（9分）

故 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为

$\dfrac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AQE}}=\dfrac{\frac{1}{2}|AB||y_D|}{\frac{1}{2}|AQ||y_E|}=\dfrac{4|y_D|}{3|y_E|}=\left|\dfrac{4y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}\right|=$

$\left|\dfrac{4y_1(my_2-1)}{y_2(my_1+3)}\right| = 4\times\left|\dfrac{my_1y_2-y_1}{my_1y_2+3y_2}\right| = 4\times\left|\dfrac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)-y_1}{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_2}\right|=4\times\left|\dfrac{\frac{1}{2}y_1+\frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1+\frac{9}{2}y_2}\right|=\dfrac{4}{3}$,

即$\triangle ABD$与$\triangle AQE$的面积之比为定值$\dfrac{4}{3}$.　(12 分)

21. **解**:(1)$f'(x)=-e^{-x}-a\sin x$,

由题意知当$x\in[0,\pi]$时,$-e^{-x}-a\sin x\leqslant 0$恒成立,

即$1+ae^{x}\sin x\geqslant 0$恒成立.

当$a\geqslant 0$时,上式显然成立;　(2 分)

当$a<0$时,$e^{x}\sin x\leqslant-\dfrac{1}{a}$.

令$g(x)=e^{x}\sin x,x\in[0,\pi]$,

则$g'(x)=(\sin x+\cos x)e^{x}=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)e^{x}$,

当$x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;

当$x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

所以当$x=\dfrac{3\pi}{4}$时,$g(x)$取得最大值,

即$g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.　(5 分)

故当$a<0$时,只需$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\leqslant-\dfrac{1}{a}$,解得$-\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\leqslant a<0$.

综上,实数a的取值范围是$[-\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}},+\infty)$.　(6 分)

(2)由题意得$e^{-x}+a\cos x+(2-a)(x+1)-3\geqslant 0$对任意$x\in(-\infty,0]$恒成立,

令$k(x)=e^{-x}+a\cos x+(2-a)(x+1)-3$,

则$k(0)=0$,且$k'(x)=-e^{-x}-a\sin x+2-a$,

所以需$k'(0)=1-a\leqslant 0$,即$a\geqslant 1$.　(7 分)

下面证当$a\geqslant 1$时,$k(x)\geqslant 0$对任意$x\in(-\infty,0]$恒成立.

当$\sin x=-1$,即$x=-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi,k\in\mathbf{N}$时,

$k'(x)=k'\left(-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi\right)=-e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}+2<0$;　(8 分)

当$\sin x\neq-1$,即$x\neq-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi,k\in\mathbf{N}$时,

$\dfrac{k'(x)}{\sin x+1}=\dfrac{2-e^{-x}}{\sin x+1}-a$.

令$h(x)=1-e^{-x}-\sin x,x\in(-\infty,0]$,

则$h'(x)=e^{-x}-\cos x$.

因为$x\leqslant 0$,所以$-x\geqslant 0$,

所以$h'(x)\geqslant 1-\cos x\geqslant 0$,

所以$h(x)$在区间$(-\infty,0]$上单调递增,

所以$h(x)\leqslant h(0)=0$,

所以$1-e^{-x}\leqslant\sin x$,则$2-e^{-x}\leqslant 1+\sin x$.　(10 分)

故当$x\leqslant 0$,且$x\neq-\dfrac{\pi}{2}-2k\pi,k\in\mathbf{N}$时,$\dfrac{2-e^{-x}}{\sin x+1}\leqslant 1$.

又$a\geqslant 1$,所以$\dfrac{k'(x)}{\sin x+1}=\dfrac{2-e^{-x}}{\sin x+1}-a\leqslant 0$,

所以$k'(x)\leqslant 0$.

综上,当$x\leqslant 0$时,$k'(x)\leqslant 0$恒成立,且$k'(x)=0$的根不连续,所以$k(x)$在区间$(-\infty,0]$上单调递减,所以$k(x)\geqslant k(0)=0$.

故实数a的取值范围为$[1,+\infty)$.　(12 分)

22. **解**:(1)由$\begin{cases}x=2-t,\\y=3+t\end{cases}$($t$为参数)消去参数$t$,

得$y=5-x$,

所以直线l的普通方程为$x+y-5=0$.　(3 分)

由$\rho^2+4\rho\sin\theta+12-a=0$得$x^2+y^2+4y+12-a=0$,即$x^2+(y+2)^2=a-8$,

所以曲线C的直角坐标方程为$x^2+(y+2)^2=a-8$.　(5 分)

(2)由(1)知曲线C的直角坐标方程为$x^2+(y+2)^2=a-8$,

因为$a>8$,所以曲线C表示圆心为$(0,-2)$,半径为$\sqrt{a-8}$的圆.

要使直线l与曲线C有公共点,必须满足:

圆心到直线l的距离$d=\dfrac{|0-2-5|}{\sqrt{1+1}}\leqslant\sqrt{a-8}$,(7 分)

解得$a\geqslant\dfrac{65}{2}$,即实数a的取值范围为$\left[\dfrac{65}{2},+\infty\right)$.　(10 分)

23. **解**:(1)因为$f(x)=2|x+2|-|x-5|=$
$\begin{cases}-x-9,x\leqslant-2,\\3x-1,-2<x<5,\\x+9,x\geqslant 5,\end{cases}$　(2 分)

所以$f(x)\geqslant 4$等价于$\begin{cases}x\leqslant-2,\\-x-9\geqslant 4\end{cases}$或$\begin{cases}-2<x<5,\\3x-1\geqslant 4\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant 5,\\x+9\geqslant 4,\end{cases}$

解得$x\leqslant-13$或$\dfrac{5}{3}\leqslant x<5$或$x\geqslant 5$,

所以$x\leqslant-13$或$x\geqslant\dfrac{5}{3}$,　(4 分)

所以不等式$f(x)\geqslant 4$的解集为$(-\infty,-13]\cup\left[\dfrac{5}{3},+\infty\right)$.　(5 分)

(2)由(1)可知当$x=-2$时,$f(x)$有最小值,且为$f(-2)=-7$,　(7 分)

所以$f(x)\geqslant a^2+2a-10$恒成立等价于$-7\geqslant a^2+2a-10$恒成立,

所以$a^2+2a-3\leqslant 0$,解得$-3\leqslant a\leqslant 1$,

即实数a的取值范围为$[-3,1]$.　(10 分)