2020年全国高三统一联合考试

理科数学

一、选择题

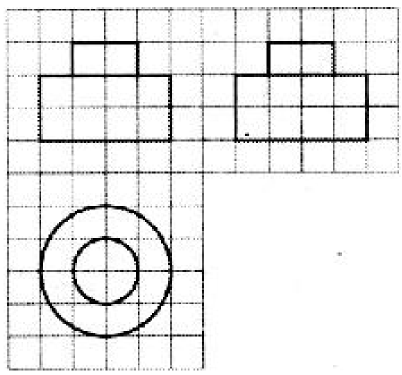
1．若集合 A＝{x|x＜3}，$B=\left\{x\middle|\sqrt{x}\leqslant 2\right\}$，则 A∩B＝

A．{x|x＜3}　B．{x|0≤x＜3}　C．{x|0＜x＜3}　D．{x|x≤4}

2．已知 i 为虚数单位，若 a 为实数，且 $a\neq0$，则 $\frac{1-a\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}=$

A．a＋i　　B．a－i　　C．i　　D．－i

3．如图，网格纸上每个小正方形的边长为 10cm，粗实线画出的是某蛋糕店制作的一款生日蛋糕的三视图，则该蛋糕的体积为



A．$3\pi\times10^3\mathrm{cm}^3$

B．$7\pi\times10^3\mathrm{cm}^3$

C．$9\pi\times10^3\mathrm{cm}^3$

D．$10\pi\times10^3\mathrm{cm}^3$

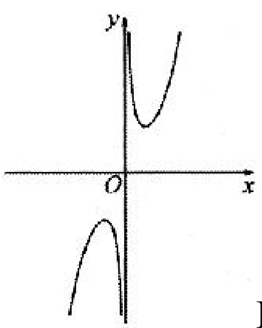
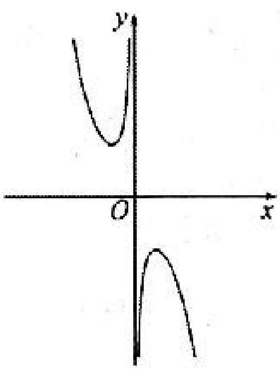
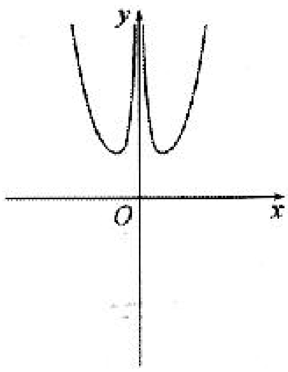
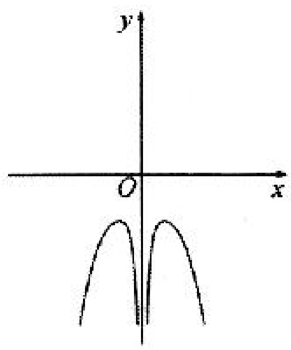
4　已知$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，且 cos2α＝2sin2α－1，则 tanα＝

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．－2　　D．2

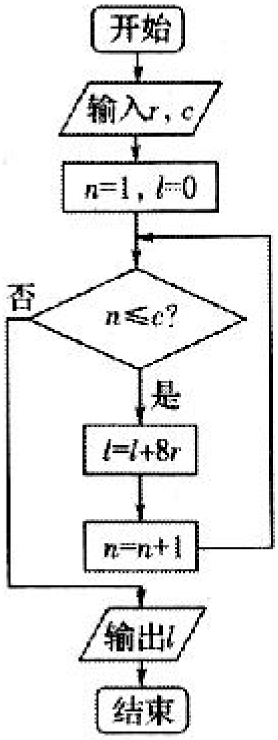
5　在$(x^2-\frac{y}{x})^5$的展开式中，xy^3 的系数为

A．20　　B．10　　C．－10　　D．－20

6　函数$f(x)=\frac{e^{2x}+1}{xe^x}$的图象大致为

A．
B．
C．
D．

7. 摆线最早出现于公元 1501 年出版的 C·包威尔的一本书中，摆线是这样定义的：一个圆沿一条直线缓慢地滚动，则圆上一固定点所经过的轨迹称为摆线．圆滚动一周，动圆上定点描画出摆线的第一拱；再向前滚动一周，动圆上定点描画出第二拱；继续滚动，可得第三拱、第四拱、……设圆的半径为 r，圆滚动的圈数为 c，摆线的长度为 l，执行如图所示程序框图，若输入的 r＝2，c＝2，则输出摆线的长度为



A．12π　B．16π　C．32　D．96

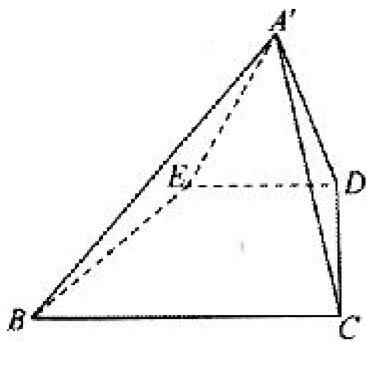
8. 在△ABC 中，a，b，c 分别为角A，B，C 的对边，b＝2，$c=\sqrt{7}$，C＝60°，则 sinA 的值为

A. $\frac{\sqrt{7}}{7}$　B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$　C. $\frac{3\sqrt{7}}{14}$　D. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$

9. 某车站在某一时刻有 9 位旅客出站，假设每位旅客选择共享单车继续出行的概率都为$\frac{1}{2}$，且各位旅客之间互不影响．设在这一时刻 9 位旅客中恰好有 k 人骑行共享单车的概率为 P（X－k），则 A．P（X＝4）＝P（X＝5）　B．P（X＝4）＞P（X＝5）

C．P（X＝5）＜P（X＝6）　D．P（X＝5）＝P（X＝6）

10. 在边长为 8 的等边△ABC 中，D，E 分别为 AC，AB 的中点．现将△ADE 沿 DE 折起到△A′DE 的位置，使得 $A'B=2\sqrt{10}$，直线 A′B 与底面 BCDE 所成的正弦值为



A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　B. $\frac{\sqrt{30}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{70}}{10}$　D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

11．已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为F，A 为抛物线 C 上异于顶点 O 的一点，点 B 的坐标为（a，b）（其中 a，b 满足$b^2-4a<0$）．当|AB|＋|AF|最小时，△ABF 恰好正三角形，则 a＝

A．1　　B．$\frac{4}{3}$　　C．$\frac{5}{3}$　　D．2

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(x-2), & x>2\\ 0, & x=2\\ \ln(2-x), & x<2\end{cases}$ 若 f（x）≤|x－a|对任意的x∈R 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A．[1，3]　　B．[2，4]　　C．[1，2]　　D．[－1，1]

二、填空题

13．已知向量$\vec{a}=(-2,1)$，$\vec{b}=(3,2)$，若$\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\perp\vec{a}$，则实数 λ＝__________．

14．函数 f（x）＝x^2－ln|x|的图象在点（－1，f（－1））处的切线方程为__________．

15．将函数 $f(x)=2\cos^2\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把所得函数的图象向右平移 1 个单位长度，最后得到的图象对应的函数设为g（x），则 g（x）在区间[－1，1]上的所有零点的和为________________．

16．已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线 l 与 C 交于A，B（其中点 A 在 x 轴上方）两点，且满足 $\overrightarrow{AF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2B}$．若 C 的离心率为$\frac{3}{2}$，直线 l 的倾斜角为 120°，则实数 λ 的值是_____________．

三、解答题

（一）必考题

17．已知等比数列$\{a_n\}$是递减数列，$a_1a_4=3$，$a_2+a_3=4$．

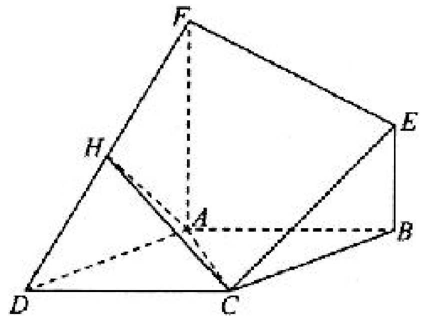
（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设 $b_n=2^{n-2}a_{n+1}+n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n．

8　如图，在多面体 ABCDFE 中，四边形 ABCD 是菱形，∠ABC＝60°，四边形 ABEF 是直角＝梯形，∠FAB＝90°，AF∥BE，AF＝AB＝2BE＝2．

① 证明：CE∥平面 ADF．

② 若平面ABCD⊥平面 ABEF，H 为 DF 的中点，求平面 ACH 与平面ABEF 所成锐二面角的余弦值．



9　为了解高三学生的“理科综合”成绩是否与性别有关，某校课外学习兴趣小组在本地区高三年级理科班中随机抽取男、女学生各 100 名，然后对 200 名学生在一次联合模拟考试中的“理科综合”成绩进行统计．规定：分数不小于 240 分为“优秀”，小于 240 分为“非优秀”．

① 根据题意，填写下面的 2×2 列联表，并根据；列联表判断是否有 90％以上的把握认为“理科综合”成绩是否优秀与性别有关．

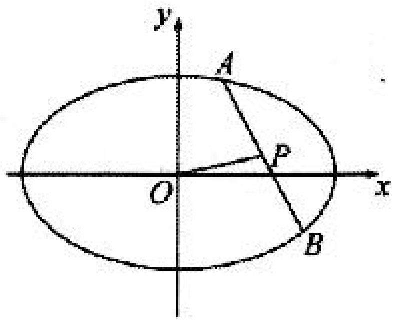
性别	优秀	非优秀	总计
男生	35		
女生		75	
总计			

② 用分层抽样的方法从成绩优秀的学生中随机抽取 12 名学生，然后再从这 12 名学生中抽取 3 名参加某高校举办的自主招生考生，设抽到的 3 名学生中女生的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中n＝a＋b＋c＋d．

P（$K^2 \geq k_0$）	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20　在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，直线l 和椭圆C 交于A，B 两点，当直线 l 过椭圆 C 的焦点，且与x 轴垂直时，$|AB|=\frac{2}{3}$．



（1）求椭圆C 的方程；

（2）设直线l 过点（1，0）且倾斜角为钝角，P 为弦 AB 的中点，当∠OPB 最大时，求直线 l 的方程．

21　已知函数 f（x）＝x^2e^{ax}－1．

（1）讨论函数f（x）的单调性；（2）当 $a>\frac{1}{3}e$ 时，求证：f（x）＞lnx．

22．[选修 4－4：坐标系与参数方程]

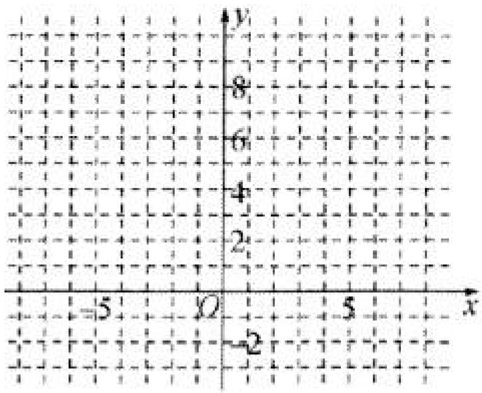
在平面直角坐标系 xOy 中，已知倾斜角为 α 的直线l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（t 为参数），曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（θ 为参数），点 P 的坐标为（－2，0）．

（1）当 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ 时，设直线 l 与曲线C 交于 A，B 两点，求|PA|·|PB|的值；

（2）若点Q 在曲线C 上运动，点 M 在线段 PQ 上运动，且 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MQ}$，求动点 M 的轨迹方程．

23．[选修 4－5：不等式选讲]

已知函数 f（x）＝|x－1|＋|2x|．



⑴ 在给出的平面直角坐标系中作出函数 f（x）的图象，并解不等式 f（x）≥2；

⑵ 若不等式f（x）＋|x－1|≥5－k 对任意的 x∈R 恒成立，求证：$k+\frac{6}{k}\geq 5$．