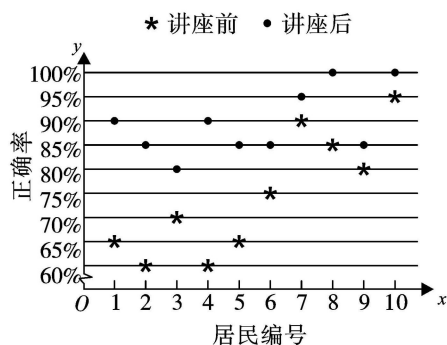


2023 年邵阳市高三第三次联考

数 学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

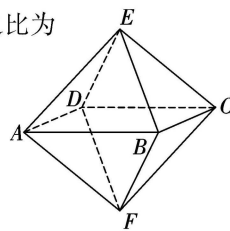
- 已知集合  $U = \{x | -5 \leq x < 2\}$ ,  $A = \{x | -3 < x < 0\}$ , 则  $\complement_U A =$ 
  - $\{x | -3 \leq x < 0\}$
  - $\{x | -3 < x \leq 0\}$
  - $\{x | -5 \leq x \leq -3 \text{ 或 } 0 \leq x < 2\}$
  - $\{x | -5 < x < -3 \text{ 或 } 0 < x < 2\}$
- 设复数  $z$  满足  $z(1-i) = 4$ , 则  $|z| =$ 
  - $2\sqrt{2}$
  - 1
  - $\sqrt{2}$
  - 2
- 在  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  边上一点,  $P$  是线段  $AD$  的中点, 且  $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AC}$ . 则  $m+n =$ 
  - $\frac{3}{2}$
  - 1
  - $\frac{1}{2}$
  - 2
- “埃拉托塞尼筛法”是保证能够挑选全部素数的一种古老的方法. 这种方法是依次写出 2 和 2 以上的自然数, 留下第一个数 2 不动, 剔除掉所有 2 的倍数; 接着, 在剩余的数中 2 后面的一个数 3 不动, 剔除掉所有 3 的倍数; 接下来, 再在剩余的数中对 3 后面的一个数 5 作同样处理; …… , 依次进行同样的剔除. 剔除到最后, 剩下的便全是素数. 在利用“埃拉托塞尼筛法”挑选 2 到 20 的全部素数过程中剔除的所有数的和为
  - 130
  - 132
  - 134
  - 141
- 为加强居民对电信诈骗的认识, 提升自我防范的意识和能力, 拧紧保障居民的生命财产的“安全阀”, 某社区开展了“防电信诈骗进社区, 筑牢生命财产防线”专题讲座. 为了解讲座效果, 随机抽取 10 位社区居民, 让他们在讲座前和讲座后各回答一份防电信诈骗手段知识问卷, 这 10 位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如图(1)所示, 则
  - 讲座前问卷答题的正确率的中位数大于 75%
  - 讲座后问卷答题的正确率的众数为 85%
  - 讲座前问卷答题的正确率的方差小于讲座后正确率的方差
  - 讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差



图(1)

6. 如图(2)所示, 正八面体的棱长为2, 则此正八面体的表面积与体积之比为

- A.  $\frac{5\sqrt{6}}{2}$
- B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- C.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$
- D.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$



图(2)

7. 拿破仑·波拿巴最早提出了一个几何定理: “以任意三角形的三条边为边, 向外构造三个等边三角形, 则这三个等边三角形的外接圆圆心恰为另一个等边三角形(此等边三角形称为拿破仑三角形)的顶点”. 在 $\triangle ABC$ 中,

已知 $\angle ACB=30^\circ$ , 且 $AC=\sqrt{3}$ ,  $BC=3$ , 现以 $BC, AC, AB$ 为边向外作三个等边三角形, 其外接圆圆心依次记为 $A', B', C'$ , 则 $\triangle A'B'C'$ 的边长为

- A. 3
- B. 2
- C.  $\sqrt{3}$
- D.  $\sqrt{2}$

8. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-f(-x)=x(e^x+e^{-x})$ , 且在 $(0, +\infty)$ 上有 $f'(x)+\frac{x-1}{e^x}<0$ .

若实数 $a$ 满足 $f(2a)-f(a+2)-2ae^{-2a}+ae^{-a-2}+2e^{-a-2}\geq 0$ , 则 $a$ 的取值范围为

- A.  $-\frac{2}{3}\leq a\leq 2$
- B.  $a\geq 2$
- C.  $a\leq -\frac{2}{3}$ 或 $a\geq 2$
- D.  $a\leq 2$

二、多选题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 下列命题中, 正确的有

- A. 若 $a>b$ , 则 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$
- B. 若 $ab=4$ , 则 $a^2+b^2\geq 8$
- C. 若 $a>b$ , 则 $ab<a^2$
- D. 若 $a>b, c>d$ , 则 $a-d>b-c$

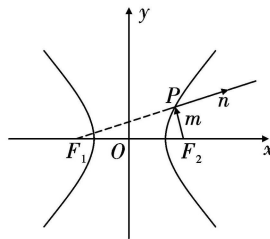
10. 已知函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ , 则

- A.  $f(x)$ 的最小正周期为 $2\pi$
- B.  $f(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 上单调递增
- C.  $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称
- D. 若 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ , 则 $f(x)$ 的最小值为 $-1$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1, F_2$ , 双曲线具有如下光学性质:

从右焦点 $F_2$ 发出的光线 $m$ 交双曲线右支于点 $P$ , 经双曲线反射后, 反射光线 $n$ 的反向延长线过左焦点 $F_1$ , 如图(3)所示. 若双曲线 $C$ 的一条渐近线的方程为 $\sqrt{3}x-y=0$ , 则下列结论正确的有

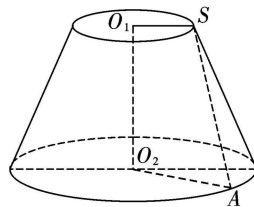
- A. 双曲线 $C$ 的方程为:  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$
- B. 若 $m \perp n$ , 则 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 12$
- C. 若射线 $n$ 所在直线的斜率为 $k$ , 则 $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- D. 当 $n$ 过点 $M(8, 5)$ 时, 光由 $F_2 \rightarrow P \rightarrow M$ 所经过的路程为10



图(3)

12. 如图(4)所示, 已知点  $A$  为圆台  $O_1O_2$  下底面圆周上一点,  $S$  为上底面圆周上一点, 且  $SO_1=1$ ,  $O_1O_2=2\sqrt{2}$ ,  $AO_2=2$ , 则

- A. 该圆台的体积为  $\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$   
 B. 直线  $SA$  与直线  $O_1O_2$  所成角最大值为  $\frac{\pi}{3}$   
 C. 该圆台有内切球, 且半径为  $\sqrt{2}$   
 D. 直线  $AO_1$  与平面  $SO_1O_2$  所成角正切值的最大值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$



图(4)

三、填空题: 本题 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

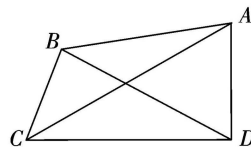
13. 一个袋子中有大小和质地相同的 5 个球, 其中有 3 个红色球, 2 个白色球, 从袋中不放回地依次随机摸出 2 个球, 则第 2 次摸到红色球的概率为 \_\_\_\_\_.
14. 三棱锥  $P-ABC$  中,  $PA \perp$  平面  $ABC$ ,  $PA=4$ ,  $AC=2AB=2\sqrt{3}$ ,  $AC \perp AB$ , 则三棱锥  $P-ABC$  外接球的表面积为 \_\_\_\_\_.
15. 过抛物线  $y^2=4x$  的焦点  $F$  作倾斜角为  $\frac{\pi}{3}$  的直线  $l$ ,  $l$  与抛物线及其准线从上到下依次交于  $A, B, C$  三点. 令  $|AF|=\lambda_1|BF|$ ,  $|BC|=\lambda_2|BF|$ , 则  $\frac{3}{\lambda_1}+\frac{2}{\lambda_2}$  的值为 \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x)=x^2+me^x-1$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_2 \geq 2x_1$ , 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

如图(5)所示,  $D$  为  $\triangle ABC$  外一点, 且  $\angle ABC=135^\circ$ ,  $AD \perp CD$ ,  $AB=\sqrt{2}$ ,  $BC=1$ ,  $CD=2$ .

- (1) 求  $\sin \angle ACD$  的值;  
 (2) 求  $BD$  的长.



图(5)

18. (12 分)

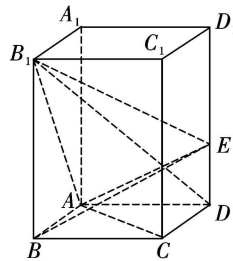
记  $S_n$  为等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $a_3=5$ ,  $S_9=81$ , 数列  $\{b_n\}$  满足  $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots+a_nb_n=(n-1) \cdot 3^{n+1}+3$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  与数列  $\{b_n\}$  的通项公式;  
 (2) 数列  $\{c_n\}$  满足  $c_n = \begin{cases} b_n, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{a_n a_{n+2}}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$  求  $\{c_n\}$  前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

19. (12 分)

如图(6)所示, 在直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为菱形,  $\angle ABC=60^\circ$ ,  $AB=2$ ,  $AA_1=2\sqrt{3}$ ,  $E$  为线段  $DD_1$  上一点.

- (1) 求证:  $AC \perp B_1D$ ;  
 (2) 若平面  $AB_1E$  与平面  $ABCD$  的夹角的余弦值为  $\frac{2}{5}$ , 求直线  $BE$  与平面  $AB_1E$  所成角的正弦值.



图(6)

20. (12分)

某电视台为了解不同性别的观众对同一档电视节目的评价情况,随机选取了100名观看该档节目的观众对这档电视节目进行评价.已知被选取的观众中“男性”与“女性”的人数之比为9:11,评价结果分为“喜欢”和“不喜欢”,并将部分评价结果整理如下表所示.

性别 \ 评价	评价		合计
	喜欢	不喜欢	
男性	15		
女性			
合计	50		100

(1) 根据所给数据,完成上面的 $2 \times 2$ 列联表;

(2) 依据 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,能否认为性别因素与评价结果有关系?

(3) 电视台计划拓展男性观众市场,现从参与评价的男性中,按比例分层抽样的方法选取3人,进行节目“建言”征集奖励活动,其中评价结果为“不喜欢”的观众“建言”被采用的概率为 $\frac{1}{3}$ ,评价结果为“喜欢”的观众“建言”被采用的概率为 $\frac{2}{3}$ ，“建言”被采用奖励100元,“建言”不被采用奖励50元,记3人获得的总奖金为 $X$ ,求 $X$ 的分布列及数学期望.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$\alpha$	0.010	0.005	0.001
$\chi_{\alpha}$	6.635	7.879	10.828

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,且过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ .

(1) 求椭圆 $C$ 的标准方程;

(2) 已知 $O$ 为坐标原点, $A, B, P$ 为椭圆 $C$ 上不同的三点,若 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP}$ .试问: $\triangle ABP$ 的面积是否为定值?如果是,求出这个定值,如果不是,请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = 2e^x - a(x+1) \cdot \ln(x+1), a \in \mathbf{R}$ .

(1) 当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq \cos x - (a-2)x + 1$ 恒成立,求 $a$ 的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

