保密★使用前

泉州市 2022 届高中毕业班质量监测（一） 2022.01

高 三 数 学

本试卷共 22 题，满分 150 分，共 6 页．考试用时 120 分钟．

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．考生作答时，将答案答在答题卡上．请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效．在草稿纸、试题卷上答题无效．

3．选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚．

4．保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\{x|x\le -1$ 或 $x\ge 1\}$，$N=\{x|-3<x<1\}$，则 $M\cap N=$ ~~A~~ A

A．$\{x|-3<x\le -1\}$　　B．$\{x|-3<x<-1\}$

C．$\mathbf{R}$　　D．$\{x|-3\le x\le 1\}$

2．若 $z=a+1+a\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位）是纯虚数，则 $|\mathrm{i}\cdot(z+1)|=$ ~~D~~ ~~B~~ B

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

3．已知 $a=\dfrac{2}{3}$，$b=\log_3 2$，$c=3^{\frac{2}{3}}$，则 ~~C~~ B

A．$b<c<a$　　B．$a<b<c$　　C．$a<c<b$　　D．$b<a<c$

4．已知 $\cos(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)=-\dfrac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$ B

A．$\dfrac{24}{25}$　　B．$\dfrac{7}{25}$　　C．$-\dfrac{7}{25}$　　D．$-\dfrac{24}{25}$

5．抛物线具有如下光学性质：从焦点发出的光线经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的对称轴．生活中的探照灯就是利用这个原理设计的．已知 F 是抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点，从 F 发出的光线经 C 上的点 M 反射后经过点 $(4,\ 2\sqrt{3})$，则 $|FM|=$

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

6. 若正实数 x，y 满足 $\frac{1}{x}+y=2$，则 $x+\frac{4}{y}$ 的最小值是

A. 4　　B. $\frac{9}{2}$　　C. 5　　D. 9

7. 四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，$|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{DA}|=2$，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，点 P 是四边形 $ABCD$ 内及其边界上的点．若 $(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{DP})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA})=-4$，则点 P 的轨迹的长度是

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4π　　D. 16π

8. 已知函数 $f(x)=ax-e^x$，$\forall x\in(1,+\infty)$，$f(x)<a\ln x+a-ex$，则实数 a 的取值范围是 A

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $(-\infty,e)$　　D. $(-\infty,e]$

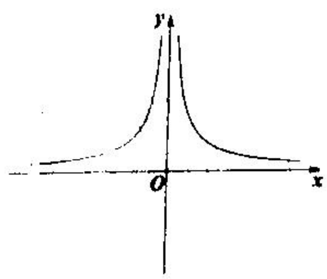
二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

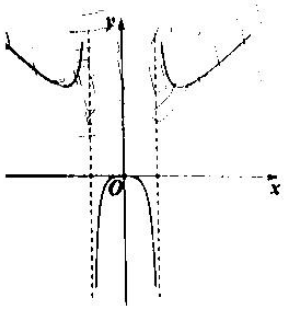
9. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，其前 n 项和为 S_n，且 $a_1=-5$，$S_3=-9$，则 A

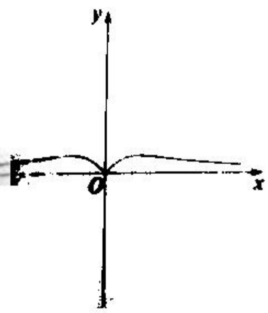
A. $d=2$　　B. S_2、S_4、S_6 为等差数列

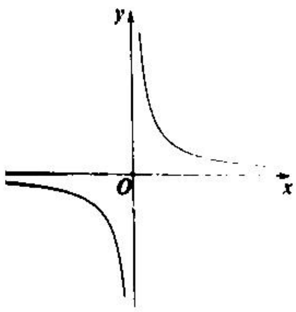
C. 数列 $\{2^{a_n}\}$ 是等比数列　　D. S_3 是 S_n 的最小值

10. 函数 $f(x)=\frac{|x|}{x^2+a}$ 的大致图象可能是 C

A.


B.


C.


D.


11. 将函数 $f(x)=\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则

A. 函数 $f(x)\cdot g(x)$ 是奇函数

B. 函数 $f(x)\cdot g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称

C. 函数 $f(x)-g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

D. 函数 $f(x)-g(x)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8}\right]$

12. 在矩形 $ABCD$ 中（如图 1），$AD=2AB=2$，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}(0<\lambda\le 1)$．将△$BAE$ 沿 AE 折起得到以 B_1 为顶点的锥体（如图 2），若记侧棱 B_1D 的中点为 P，则以下判断正确的是

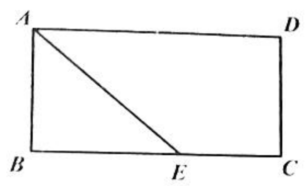


图 1

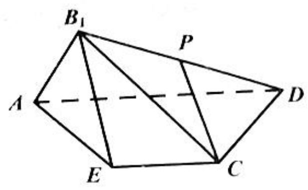


图 2

A. 若 $\lambda=\frac{1}{2}$，则 CP 的长度为定值

B. 若 $\lambda=1$，则三棱锥 B_1-ACD 的外接球表面积为 5π

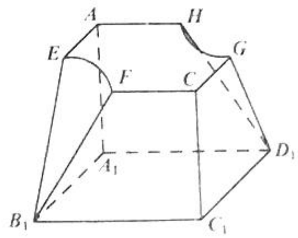
C. 若记 B_1A 与平面 ACD 所成的角为 α，则 $\sin\alpha$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 若二面角 B_1-AE-C 为直二面角，且 $B_1D\perp AE$，则 $\lambda=\frac{1}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的两条渐近线夹角为_________.

14. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H 分别为棱 AB，BC，CD，DA 的中点，将该正方体挖去两个四分之一圆锥，得到如图所示的几何体，则该几何体的体积为________.



15. 2021年7月25日召开的第44届世界遗产大会上，"泉州：宋元中国的世界海洋商贸中心"获准列入世界文化遗产名录，至此泉州20年的申遗终于圆梦．申遗的遗产点包括九日山祈风石刻、开元寺、洛阳桥等22处代表性古遗迹，这些古遗迹可分为文化纪念地史迹等五类，这五类古遗迹充分展现了10-14世纪泉州完备的海洋贸易制度体系、发达的经济水平及多元包容的文化态度．某校中学生准备到各类古遗迹打卡，已知该同学打卡第一类、第二类的概率都是$\frac{2}{3}$，打卡第三类、第四类和第五类的概率都是$\frac{1}{2}$，且是否打卡这五类古遗迹相互独立．用随机变量X表示该同学打卡的类别数，则$P(X=4)=$________.

16. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2n-1$，记b_m为$\{a_n\}$在区间$[m,2^m)$ $(m\in \mathbf{N}^*)$内项的个数，则$b_6=$________，不等式$b_{m+1}-b_m>2022$成立的m的最小值为________.（第一空2分，第二空3分）

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10分）

已知函数$f(x)=x-a\sin x$的图象在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-x$.

（1）求a；

（2）求$f(x)$在$[0,2\pi]$的单调区间.

18.（12分）

记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1=1$，且$a_{n+1}-S_n=1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

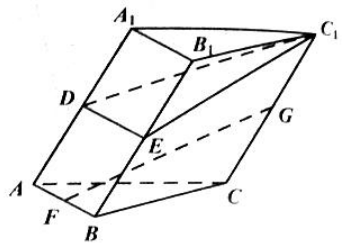
（2）记$b_n=a_n\cdot\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

19.（12 分）

如图，斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，$AB=AA_1=6$，$\angle A_1AC=60°$，F，G，D，E 分别为 AB，CC_1，AA_1，BB_1 的中点.

（1）证明：FG // 平面 C_1DE；

（2）若平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC，求平面 C_1DE 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值.



20.（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2a\cos B=2c-b$.

（1）求 A；

（2）若 $\triangle ABC$ 内一点 P 满足：$PB\perp PC$，$\angle APC=120°$，且 $AC=3AB=3$，求 $\tan\angle ACP$.

21．（12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $A(0,1)$ 在 E 上．

（1）求 E 的方程；

（2）点 B 为 E 的下顶点，点 P 在 E 内且满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，直线 AP 交 E 于点 Q，求 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}$ 的取值范围．

22．（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+a(x-e^x)+1$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数．

（1）若 $f'(1)=0$，求 $f(x)$ 的最大值；

（2）讨论 $f(x)$ 的零点个数．

保密★使用前

泉州市 2022 届高中毕业班质量监测（二）解析

2022.01

高 三 数 学（选择填空题）

本试卷共 22 题，满分 150 分，共 6 页．考试用时 120 分钟．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合 $M=\{x|x\le -1$ 或 $x\ge 1\}$， $N=\{x|-3<x<1\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{x|-3<x\le -1\}$　　B．$\{x|-3<x<-1\}$

C．$\mathbf{R}$　　D．$\{x|-3\le x\le 1\}$

【试题简析】由已知可得 $M\cap N=\{x|-3<x\le -1\}$，故选 A.

2．若 $z=a+1+a\mathrm{i}$（$a\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位）是纯虚数，则 $|\mathrm{i}\cdot(z+1)|=$

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【试题简析】因为 z 是纯虚数，所以 $a+1=0$ 且 $a\ne 0$，解得 $a=-1$，所以 $z=-\mathrm{i}$.

因为 $\mathrm{i}\cdot(z+1)=\mathrm{i}\cdot(1-\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，所以 $|\mathrm{i}\cdot(z+1)|=\sqrt{2}$，故选 B.

【另：$|\mathrm{i}\cdot(z+1)|=|z+1|=|1\text{-}\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，故选 B.】

3．已知 $a=\dfrac{2}{3}$，$b=\log_3 2$，$c=3^{\frac{2}{3}}$，则

A．$b<c<a$　　B．$a<b<c$　　C．$a<c<b$　　D．$b<a<c$

【试题简析】因为 a，$b\in(0,1)$， $c\in(1,+\infty)$，所以$c>a$， $c>b$，排除 A,C.

又因为$3\log_3 2=\log_3 8<\log_3 9=2$ 即 $\log_3 2<\frac{2}{3}$，所以 $a>b$，

故$b<a<c$，故选 D.

【另：因为$a=\frac{2}{3}=\log_3 3^{\frac{2}{3}}$，$b=\log_3 2$，故只需比较$3^{\frac{2}{3}}$与 2 的大小，只需比较$3^2$与$2^3$的大小，故易得 $a>b$.】

4．已知$\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{3}{5}$，则$\sin 2\alpha=$

A. $\frac{24}{25}$　　　B. $\frac{7}{25}$　　　C. $-\frac{7}{25}$　　　D. $-\frac{24}{25}$

【试题简析】

解法 1： 由 $\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{3}{5}$，得 $\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=-\frac{3}{5}$，

两边平方，得$\frac{1}{2}(1+2\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)=\frac{9}{25}$，解得$\sin 2\alpha=-\frac{7}{25}$.

解法 2： 由$\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{3}{5}$，得$\cos^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{9}{25}$，

即$\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)}{2}=\frac{1+\sin 2\alpha}{2}=\frac{9}{25}$，解得 $\sin 2\alpha=-\frac{7}{25}$

解法 3： 由$\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{3}{5}$，

得 $\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=-\frac{3}{5}$，

即 $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，则 $\frac{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1+2\tan\alpha+\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$=\frac{18}{25}$，解得$\tan\alpha=-7$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{7}$，

于是$\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{7}{25}$.

解法 4：$\sin 2\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)=2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)-1=-\frac{7}{25}$． 故选 C．

5. 抛物线具有如下光学性质：从焦点发出的光线经过抛物线上的一点反射后，反射光线平行于抛物线的对称轴．生活中的探照灯就是利用这个原理设计的．已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，从 F 发出的光线经 C 上的点 M 反射后经过点 $(4,\ 2\sqrt{3})$，则 $|FM|=$

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

【试题简析】因为从 F 发出的光线经 C 上的点 M 反射后经过点 $(4,\ 2\sqrt{3})$，由抛物线的光学性质可知 $y_M=2\sqrt{3}$．代入 $y^2=4x$ 得 $x_M=3$，所以 $|FM|=3+1=4$．故选 C．

6. 若正实数 x，y 满足 $\frac{1}{x}+y=2$，则 $x+\frac{4}{y}$ 的最小值是

A．4　　　　B．$\frac{9}{2}$　　　　C．5　　　　D．9

【试题简析】

解法 1： 因为 x，y 是正实数，所以 $xy>0$，

有 $x+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+y)(x+\frac{4}{y})=\frac{1}{2}(5+xy+\frac{4}{xy})\geq\frac{1}{2}(5+2\sqrt{4})=\frac{9}{2}$，

当且仅当 $xy=\frac{4}{xy}$，即 $x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{4}{3}$ 时取到等号．

解法 2： 由已知 $\frac{1}{x}+y=2$ 得， $y=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$，

因为 x，y 是正实数，所以 $x\geq\frac{1}{2}$，

所以 $x+\dfrac{4}{y}=x+\dfrac{4x}{2x-1}=x+\dfrac{2}{2x-1}+2=\dfrac{2x-1}{2}+\dfrac{2}{2x-1}+\dfrac{5}{2}\geq 2+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$，

当且仅当 $\dfrac{2x-1}{2}=\dfrac{2}{2x-1}$ 时，即 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{4}{3}$ 时取到等号.

解法 3： 由已知 $\dfrac{1}{x}+y=2$ 得，$y=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$，

因为 x，y 是正实数，所以 $x\geq\dfrac{1}{2}$，

所以 $x+\dfrac{4}{y}=x+\dfrac{4x}{2x-1}=x+\dfrac{2}{2x-1}+2$.

令 $f(x)=x+\dfrac{2}{2x-1}+2$，$x>\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(2x-1)^2}=\dfrac{4x^2-4x-3}{(2x-1)^2}=\dfrac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-1)^2}$

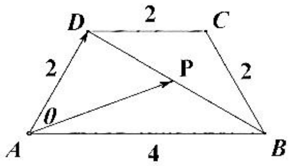
当 $x\in(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2})$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，$x\in(\dfrac{3}{2},+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，

所以当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=f(\dfrac{3}{2})=\dfrac{3}{2}+1+2=\dfrac{9}{2}$.　故选 B.

7. 四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AB=2DC$，$|DC|=|DA|=2$，$\angle DAB=\dfrac{\pi}{3}$，点 P 是四边形 $ABCD$ 内及其边界上的点．若 $(AP-DP)\cdot(PB+BA)=-4$，则点 P 的轨迹的长度是

A. $\sqrt{3}$　　　B. $2\sqrt{3}$　　　C. 4π　　　D. 16π

【试题简析】



解法 1： $(AP-DP)\cdot(PB+BA)=(AP+PD)\cdot(PB+BA)$

$=AD\cdot PA=-AP\cdot AD=-4$，即 $AP\cdot AD=4$.

设向量 AP 与 AD 的夹角为 θ，则 $AP\cdot AD=|AP||AD|\cos\theta=4$，

因为 $|DA|=2$，所以 $|AP|\cos\theta=2$，

由向量投影定义得，向量 AP 在向量 AD 上的投影为 2，

即动点 P 在过点 D 且垂直于 AD 的直线上.

在$\triangle BAD$中，$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，$AD=2$，$AB=2DC=2AD=4$，

由余弦定理得 $BD^2=AD^2+AB^2-2AB\cdot AD\cos 60^\circ=12$，所以 $BD=2\sqrt{3}$；

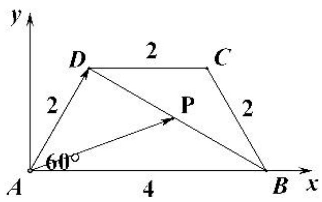
则 $BD^2+AD^2=AB^2$，所以 $BD\perp AD$.

因为 P 是四边形 $ABCD$ 内及其边界上的点，所以点 P 的轨迹为线段 BD.

所以点 P 的轨迹的长度为 $2\sqrt{3}$. 故选 B.

解法 2： $(AP-DP)\cdot(PB+BA)=-(PA-PD)\cdot PA=-DA\cdot PA=-AP\cdot AD=-4$，

所以 $AP\cdot AD=4$.



如右图所示，以点 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，过 A 且垂直 AB 的直线为 y 轴建立平面直角坐标系. 则 $D(1,\sqrt{3})$，$B(4,0)$，

设 $P(x,y)$，则 $AP\cdot AD=x+\sqrt{3}y=4$.

又因为 $k_{BD}=\frac{\sqrt{3}-0}{1-4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 BD 方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$，即 $x+\sqrt{3}y=4$.

又因为 P 是四边形 $ABCD$ 内及其边界上的点，则点 P 的轨迹为线段 BD.

所以 $BD=\sqrt{(4-1)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. 所以点 P 的轨迹的长度为 $2\sqrt{3}$.

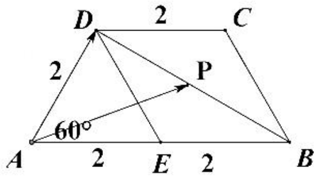
解法 3： $(AP-DP)\cdot(PB+BA)=-(PA-PD)\cdot PA=-DA\cdot PA=-AP\cdot AD=-4$，

所以 $AP\cdot AD=4=(AD)^2$，即 $(AP-AD)\cdot AD=0$，即 $DP\cdot AD=0$，

所以 $DP\perp AD$.

取 AB 中点 E，由已知 $AB=2DC$ 得 $AD=AE$，又因为$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle ADE$是等边三角形，所以 $DE=2$，则 $ED=EA=EB=2$，所以点 A，B，D 在以 AB 为直径的圆上，所以 $BD\perp AD$，且 $BD=2\sqrt{3}$.又因为 P 是四边形 $ABCD$ 内及其边界上的点，则点 P 的轨迹为线段 BD.

所以点 P 的轨迹的长度为 $2\sqrt{3}$． 故选 B.



8. 已知函数 $f(x)=ax-\mathbf{e}^x$， $\forall x\in(1，+\infty)$， $f(x)<a\ln x+a-\mathbf{e}x$，则实数 a 的取值范围是

A．$(-\infty，1)$ B．$(-\infty，1]$ C．$(-\infty，\mathbf{e})$ D．$(-\infty，\mathbf{e}]$

【试题简析】

解法 1：（指对同构法） 因为 $a\ln x+a-\mathrm{e}x=a(\ln x+1)-\mathrm{e}^{\ln x+1}$，

所以 $\forall x\in(1，+\infty)$， $f(x)<a\ln x+a-\mathrm{e}x$，

等价于 $f(\ln x+1)>f(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 恒成立，

因为 $1<\ln x+1<x$ 在 $(1，+\infty)$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 单调递减，

所以 $f'(x)=a-\mathrm{e}^x\le 0$ 在 $(1，+\infty)$ 恒成立，即 $a\le\mathrm{e}^x$ 在 $(1，+\infty)$ 恒成立，从而 $a\le\mathrm{e}$． 故选 D.

解法 2：（端点效应法） $a\ln x+a-\mathrm{e}x>ax-\mathrm{e}^x \Leftrightarrow \mathrm{e}^x-\mathrm{e}x+a(\ln x+1-x)>0$，

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x+a(\ln x+1-x)$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}+a\left(\frac{1}{x}-1\right)$，

注意到 $\varphi(1)=0$， $\varphi'(1)=0$，

（1） 当 $a\le 0$ 时， $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}+a\left(\frac{1}{x}-1\right)>0$， $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

所以 $\varphi(x)>\varphi(1)=0$，成立，

（2） 当 $a>0$ 时， 令 $u(x)=\varphi'(x)$， 则 $u'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{a}{x^2}$， $u''(x)=\mathrm{e}^x+\frac{2a}{x^3}>0$

所以 $u'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $u'(x)>u'(1)=\mathrm{e}-a$，

①当 $a\le e$ 时， $u'(x)>u'(1)=e-a\ge 0$，

所以$u(x)$ 在$(1,+\infty)$ 单调递增，且$u(1)=0$，

所以$u(x)>u(1)=0$，所以$\varphi(x)$ 在$(1,+\infty)$ 单调递增，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，

②当 $a>e$ 时， $u'(1)=e-a<0$， 而$u'\left(\sqrt{\frac{a}{e}}\right)=e^{\sqrt{\frac{a}{e}}}-e>0$，

所以$\exists x_0\in\left(1,\sqrt{\frac{a}{e}}\right)$，使$u'(x_0)=0$，

当 $x\in(1,x_0)$，$u'(x)<0$，所以$u(x)$ 在$(1,x_0)$ 单调递减，即$\varphi(x)$ 在$(1,x_0)$ 单调递减，此时$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，从而$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，矛盾，

综上， $a\le e$．所以选 D.

解法 3：（变量分离法） $a\ln x+a-ex>ax-e^x \Leftrightarrow a<\dfrac{e^x-ex}{x-\ln x-1}$，

令$\varphi(x)=\dfrac{e^x-ex}{x-\ln x-1}(x>1)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{(e^x-e)(x-\ln x-1)-(e^x-ex)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x-1)^2}$，

$$\varphi'(x)=\frac{e^x\left(x-2+\frac{1}{x}-\ln x\right)+e\ln x}{(x-\ln x-1)^2}\qquad u(x)=e^x\left(x-2+\frac{1}{x}-\ln x\right)+e\ln x,$$

则$u'(x)=\dfrac{1}{x}\left(e^x\left(x^2-x-\frac{1}{x}-x\ln x\right)+e\right)$， 令 $v(x)=e^x\left(x^2-x-\frac{1}{x}-x\ln x\right)$，

$v'(x)=e^x\left(x^2+x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-2-x\ln x-\ln x\right)$，注意到 $x-\ln x>1(x>1)$，

即$v'(x)=e^x\left[(x+1)(x-\ln x)-2+\frac{1-x}{x^2}\right]>e^x\left(x+1-2+\frac{1-x}{x^2}\right)=e^x(x-1)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)>0$，

所以 $v(x)$ 在$(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $v(x)>v(1)=-e$，从而$u'(x)>0$，

所以$u(x)$ 在$(1,+\infty)$ 单调递增，所以$u(x)>u(1)=0$，以$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 在$(1,+\infty)$ 单调递增.

又因为$\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x}{\frac{1}{x^2}}=e$，所以$a\le e$．故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，其前n项和为S_n，且$a_1=-5$，$S_3=-9$，则

A．$d=2$

B．S_2，S_4，S_6为等差数列

C．数列$\{2^{a_n}\}$是等比数列

D．S_3是S_n的最小值

【试题解析】由$S_3=a_1+a_2+a_3=3a_2=-9$，所以$a_2=-3$，所以$d=a_2-a_1=2$，故A正确；

由等差数列性质 $S_4-S_2=a_3+a_4$，$S_6-S_4=a_5+a_6$，$a_3+a_4\neq a_5+a_6$，

所以S_2，S_4，S_6不是等差数列，故 B 错误；

因为$a_n=a_1+(n-1)d=-5+2(n-1)=2n-7$，

所以$\dfrac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=\dfrac{2^{2n-5}}{2^{2n-7}}=4$，所以数列$\{2^{a_n}\}$是等比数列，故C正确；

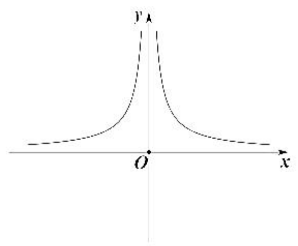
当$a_n=2n-7\le 0$时，$n\le\dfrac{7}{2}$，即数列$\{a_n\}$中，a_1，a_2，a_3均为负数，

当$n\ge 4$时，$a_n>0$．所以S_3是S_n的最小值，故 D 正确.

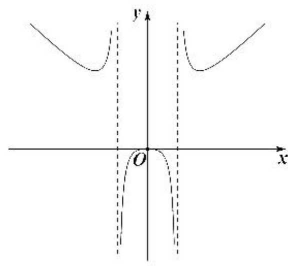
故选 ACD.

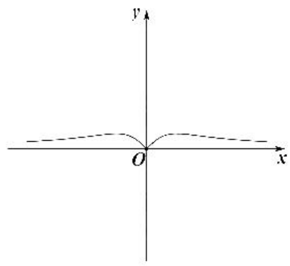
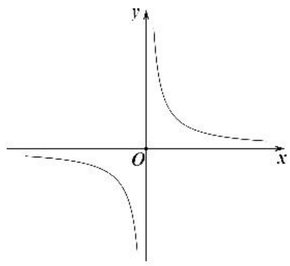
10. 函数$f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+a}$的大致图象可能是

A.



B.



C. 　　D. 

【试题简析】

解法 1：因为 $f(x)=\frac{|x|}{x^2+a}$ 为定义域上的偶函数，

图象关于 y 轴对称，所以 D 不可能.

又因为当 $x\to+\infty$，所以 $f(x)\to 0$，所以 B 不可能.　故选 AC.

解法 2：因为 $f(x)=\frac{|x|}{x^2+a}$ 为定义域上的偶函数，

图象关于 y 轴对称，所以 D 不可能.

由于 $f(x)$ 为定义域上的偶函数，只需考虑 $x\in(0,+\infty)$ 的情况即可.

①当 $a=0$ 时，函数 $f(x)=\frac{|x|}{x^2}=\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$，所以 A 可能；

②当 $a>0$ 时，$f(x)=\frac{x}{x^2+a}$，$f'(x)=\frac{a-x^2}{(x^2+a)^2}$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\sqrt{a})$ 单调递增，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 单调递减，所以 C 可能；

③当 $a<0$ 时，$f(x)=\frac{x}{x^2+a}$，$f'(x)=\frac{a-x^2}{(x^2+a)^2}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\sqrt{-a})$ 单调递减，在 $(\sqrt{-a},+\infty)$ 单调递减，所以 B 不可能；

故选 AC.

11. 将函数 $f(x)=\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则

A. 函数 $f(x)\cdot g(x)$ 是奇函数

B. 函数 $f(x)\cdot g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称

C. 函数 $f(x)-g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

D. 函数 $f(x)-g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{\ },\frac{5\pi}{\ }\right]$

【试题简析】由 $f(x)=\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得 $g(x)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\sin 2x$，故 $f(x)\cdot g(x)=-\sin 2x\cos 2x=-\frac{1}{2}\sin 4x$ 为奇函数，选项 A 正确；

$f(x)\cdot g(x)=-\frac{1}{2}\sin 4x$ 的对称轴方程满足 $4x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即

$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-1$ 时，对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{8}$，选项 B 正确；

$f(x)-g(x)=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，选项 C 错

误；$f(x)-g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，当 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解

得 $\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{8}+k\pi$，当 $k=0$ 时，$\frac{\pi}{8}\le x\le\frac{5\pi}{8}$，所以 $f(x)-g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上

的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$，选项 D 正确；故选 ABD.

12. 在矩形 $ABCD$ 中（如图 1），$AD=2AB=2$，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}(0<\lambda\le 1)$．将 $\triangle BAE$ 沿 AE 折起得到以 B_1 为顶点的锥体（如图 2），若记侧棱 B_1D 的中点为 P，则以下判断正确的是

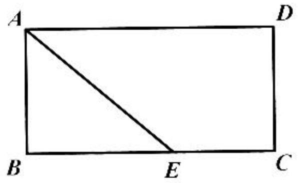


图 1

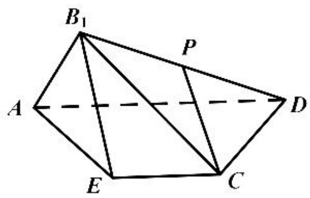


图 2

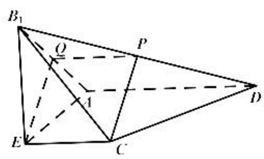
A. 若 $\lambda=\frac{1}{2}$，则 CP 的长度为定值

B. 若 $\lambda=1$，则三棱锥 B_1-ACD 的外接球表面积为 5π

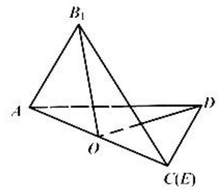
C. 若记 B_1A 与平面 ACD 所成的角为 α，则 $\sin\alpha$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 若二面角 B_1-AE-C 为直二面角，且 $B_1D\perp AE$，则 $\lambda=\frac{1}{3}$

【试题简析】对 A，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，点 E 为 BC 的中点，在翻折的过程中，取 AB_1 的中点 Q，连接 EQ, PQ，则易证明 $ECPQ$ 为平行四边形，所以 $CP=EQ$ 为定长（EQ 为 $\triangle AB_1E$ 的中线），故 A 正确；



对 B，当 $\lambda=1$ 时，点 E 与点 C 重合，$\triangle AB_1C$ 与 $\triangle ADC$ 两个全等的直角三角形，取 AC 的中点 O，连接 OB_1，OD，则易知 O 为三棱锥 B_1-ACD 的外接球的球心，外接球的半径 $R=OA=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，故 $S_{球}=4\pi R^2=5\pi$，故 B 正确；



对C，在翻折的过程中，当且仅当平面 $B_1AE\perp$ 平面 ACD 时，B_1A 与平面 ACD 所成角最大为 $\angle B_1AE$，则 $\sin\angle B_1AE=\dfrac{B_1E}{AE}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}}$

（设 $BE=x,0<x\le 2$）

所以当 $x=2$ 即点 E 与点 C 重合时，$(\sin\angle B_1AE)_{\max}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故C正确；

对D，因为二面角 B_1-AE-C 为直二面角，即平面 $B_1AE\perp$ 平面 AEC

平面 $B_1AE\cap$ 平面 $AEC=AE$，所以点 B_1 在平面 AEC 内的射影必在 AE 上，

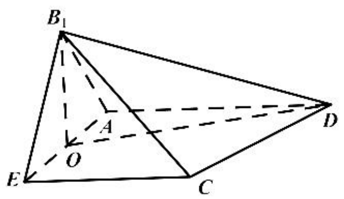
过 B_1 作 AE 的垂线，垂足为点 O，连接 OD，

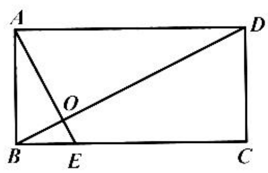
则易知 $AE\perp$ 平面 B_1OD，所以 $AE\perp OD$，

即在矩形 $ABCD$ 中，$AE\perp BD$，

则由平几知识易得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，故D错误．

故选ABC．



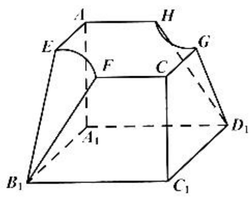


三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的两条渐近线夹角为__________.

【试题简析】双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{\quad}{3}x$，故两条渐近线夹角为60°.

14. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H 分别为棱 AB，BC，CD，DA的中点，将该正方体挖去两个四分之一圆锥，得到如图所示的几何体，则该几何体的体积为_________.



【试题简析】因为该几何体为正方体挖去两个四分之一圆锥，

所以圆锥 $R=1, h=2$， $\therefore V=V_{\text{正方体}}-\frac{1}{2}V=2^3-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times2=8-\frac{\pi}{3}$.

15．2021 年7 月25 日召开的第 44 届世界遗产大会上，“泉州：宋元中国的世界海洋商贸中心”获准列入世界文化遗产名录，至此泉州 20 年的申遗终于圆梦．申遗的遗产点包括九日山祈风石刻、开元寺、洛阳桥等 22 处代表性古遗迹，这些古遗迹可分为文化纪念地史迹等五类. 这五类古遗迹充分展现了 10-14 世纪泉州完备的海洋贸易制度体系、发达的经济水平及多元包容的文化态度．某校中学生准备到各类古遗迹打卡，已知该同学打卡第一类、第二类的概率都是$\frac{2}{3}$，打卡第三类、第四类和第五类的概率都是$\frac{1}{2}$，且是否打卡这五类古遗迹相互独立. 用随机变量 X 表示该同学打卡的类别数，则$P(X=4)=$___.

【试题简析】记该同学打卡第一类、第二类的类别数为ξ，打卡第三类、第四类和第五类的类别数为η，因此随机变量 $X=\xi+\eta$，

则$P(X=4)=P(\xi=1,\eta=3)+P(\xi=2,\eta=2)=C_2^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0$

$+C_2^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{2}{9}$，故答案为$\frac{2}{9}$.

2^m，得 $\frac{m+1}{2} \le n < 2^{m-1} + \frac{1}{2}$，

16．已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n = 2n-1$，记b_m 为$\{a_n\}$在区间$[m, 2^m)$ $(m \in \mathbf{N}^*)$中的项的个数，则 $b_6 =$___，不等式 $b_{m+1} - b_m > 2022$ 成立的 m 的最小值为__.（第一空 2 分，第二空 3 分）

【试题解析】令 $m \le 2n-1 <$ 2^m

当 m 为奇数时，$b_m = 2^{m-1} - \frac{m+1}{2} + 1 = 2^{m-1} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}$，

当 m 为偶数时，$b_m = 2^{m-1} - \frac{m+2}{2} + 1 = 2^{m-1} - \frac{m}{2}$，

所以 $b_6 = 2^5 - 3 = 29$.

当 m 为奇数时，$b_{m+1} - b_m = 2^m - \frac{m+1}{2} - (2^{m-1} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}) = 2^{m-1} - 1 > 2022$，

即 $2^{m-1} > 2023$，因为 $2^{10} < 2023 < 2^{11}$，所以 $m-1 \ge 11$，即 $m \ge 12$，

因为 m 为奇数，所以 m 的最小值为13；

当 m 为偶数时，$b_{m+1} - b_m = 2^m - \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} - (2^{m-1} - \frac{m}{2}) = 2^{m-1} > 2022$，

因为 $2^{10} < 2022 < 2^{11}$，所以 $m-1 \ge 11$，$m \ge 12$，所以 m 的最小值为12.

综上所述，m 的最小值为12.

保密★使用前

泉州市 2022 届高中毕业班质量监测（二）解析

2022.01

高 三 数 学（解答题部分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知函数 $f(x)=x-a\sin x$ 的图象在点$(0, f(0))$处的切线方程为 $y=-x$．

（1）求 a；　　（2）求 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 的单调区间．

【试题解析】

（1）因为 $f(x)=x-a\sin x$，所以 $f'(x)=1-a\cos x$，…………1 分

$f'(0)=1-a\cos 0=1-a$．…………2 分

因为 $f(x)=x-a\sin x$ 的图象在$(0, f(0))$处的切线方程为 $y=-x$，

所以 $f'(0)=k_{切}$，即 $1-a=-1$，…………4 分

所以 $a=2$．…………5 分

（2）由（1）可得 $f'(x)=1-2\cos x$，…………6 分

由 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{3}$．…………7 分

当 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{5\pi}{3}<x<2\pi$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；…………8 分

当 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5\pi}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；…………9 分

所以 $f(x)$ 的递减区间为 $[0, \dfrac{\pi}{3}]$，$[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}]$，递增区间为 $[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi]$．…10 分

【说明】①两个单调区间若用“ ∪ ”连接，扣 1 分.②单调区间不区分开闭.③正确求出单调区间，未指明单调性，第（2）题共得 3 分；直接正确写出三个单调区间，只得 1 分.

18.（12分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=1$，且 $a_{n+1}-S_n=1$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $b_n=a_n\cdot\log_2 a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

【试题解析】

解法1：（1）已知 $a_{n+1}-S_n=1$，即 $S_n=a_{n+1}-1$，

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=a_n-1$，……1分

两式相减得：$a_{n+1}=2a_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$，……2分

当 $n=1$ 时，$a_2=S_1+1$ 及 $S_1=a_1=1$，得 $a_2=2$，……3分

则 $\dfrac{a_2}{a_1}=2$，……4分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首项，公比 $q=2$ 的等比数列．……5分

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^{n-1}$．……6分

（2）由（1）可得 $b_n=a_n\cdot\log_2 a_n=2^{n-1}\cdot\log_2 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-1}$，……7分

$T_n=0+1\times 2+2\times 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}$

$2T_n=\quad 0+1\times 2^2+\cdots+(n-2)\cdot 2^{n-1}+(n-1)\cdot 2^n$……8分

两式相减得：$-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-(n-1)\cdot 2^n$……9分

$=\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(n-1)\cdot 2^n=(2-n)\cdot 2^n-2$……11分

所以 $T_n=(n-2)\cdot 2^n+2$．……12分

解法 2：（1）由已知 $a_{n+1}-S_n=1$，

得 $S_{n+1}-S_n-S_n=1$，即 $S_{n+1}=2S_n+1$．……………………………………………1 分

则 $S_{n+1}+1=2(S_n+1)$，………………………………………………………………2 分

即 $\dfrac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=2$，

所以数列 $\{S_n+1\}$ 是以 $S_1+1=2$ 为首项，公比 $q=2$ 的等比数列.

……………………………………………………………………………………… 3 分

所以 $S_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，则 $a_{n+1}=S_n+1=2^n$，……………………………4 分

故当 $n\geq 2$ 时，$a_n=2^{n-1}$，…………………………………………………………5 分

$a_1=1$ 符合通项，所以 $a_n=2^{n-1}$．………………………………………………6 分

（2） 由（1）可得 $b_n=a_n\cdot\log_2 a_n=2^{n-1}\times\log_2 2^{n-1}=(n-1)\cdot 2^{n-1}$，…………7 分

即 $b_n=(n-2)\cdot 2^n-(n-3)\cdot 2^{n-1}$……………………………………………………9 分

$T_n=-1\times 2-(-2)\times 1+0-(-1)\times 2+1\times 2^3-0+\cdots+(n-2)\cdot 2^n-(n-3)\cdot 2^{n-1}$

………………………………………………………………………………………………11 分

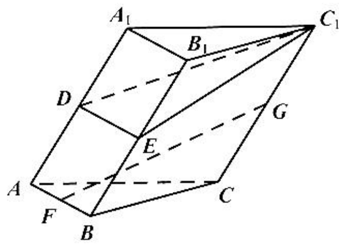
$=(n-2)\cdot 2^n+2$．

所以 $T_n=(n-2)\cdot 2_n+2$．…………………………………………………………12 分

19.（12 分）

如图，斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，$AB=AA_1=6$，$\angle A_1AC=60°$，

F，G，D，E 分别为 AB，CC_1，AA_1，BB_1 的中点.



（1）证明：$FG//$平面C_1DE；

（2）若平面 $AA_1C_1C\perp$平面 ABC，求平面C_1DE与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值.

【试题解析】

（1）**解法 1：** 设 H 为 DE 的中点，连结 FH，HC_1，……………………………………1 分

因为几何体为斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，所以 $AD//BE//CC_1$，

所以 $FH//BE$ 且 $FH=BE$.

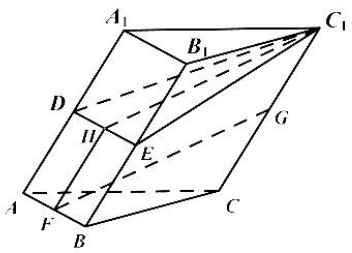
又因为G是CC_1的中点，所以$C_1G=\frac{1}{2}CC_1=\frac{1}{2}BB_1$，

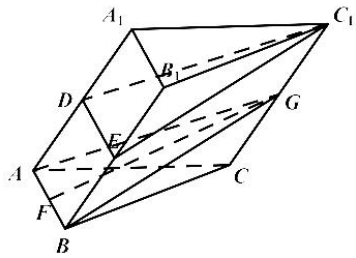
所以 $FH//C_1G$ 且 $FH=C_1G$，……………………………………………………2 分

所以四边形 C_1HFG 为平行四边形，所以 $C_1H//FG$. ………………3 分

又因为 $FG\not\subset$平面 C_1DE，$C_1H\subset$平面 C_1DE，…………………………4 分

所以 $FG//$平面 C_1DE. ……………………………………………………………5 分





解法 2：连结 AG, BG，因为 D, E 分别为 AA_1, BB_1 的中点，

所以 $DE//AB$，……1分

因为 $AB\not\subset$ 平面 DEC_1， $DE\subset$ 平面 DEC_1，

所以 $AB//$平面 DEC_1，……2分

同理可证 $BG//$平面 DEC_1，……3分

又 $AB\cap BG=G$，$AN, BG\subset$ 平面 ABG

所以平面 $ABG//$平面 DEC_1 ，……4分

因为 $FG\subset$平面 ABG，所以 $FG//$平面 DEC_1．……5分

解法 3：以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$ 为基底，

则 $\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，……1 分

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，……2 分

所以 $\overrightarrow{FG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC_1}$，……3 分

所以 $\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC_1}$ 共面，……4 分

又 $FG\not\subset$平面 C_1DE，所以 $FG//$平面 C_1DE，……5 分

（2） 解法 1：延长 C_1D，CA 交于点 P，延长 C_1E，CB 交于点 Q，

则面 C_1DE 与面 ABC 所成的锐二面角为二面角 C_1-PQ-C，……6 分

过 C_1 作 AC 的垂线，交 AC 的延长线于点 N，

过 N 作 $NM\perp PQ$ 于点 M，连结 C_1M，..7 分

因为平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC 且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=AC$，

$C_1N\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $C_1N\perp$ 平面 ABC，

所以 $PQ\perp C_1N$．..8 分

又因为 $NM\perp PQ$，$NM\cap C_1N=N$，所以 $PQ\perp$ 平面 C_1MN，

所以 $C_1M\perp PQ$，..9 分

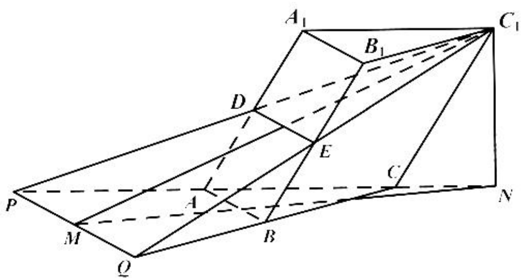
所以 $\angle C_1MN$ 为二面角 C_1-PQ-C 的平面角．..10 分

由题意易知，在 $PN=15$，$C_1N=3\sqrt{3}$，$MN=\frac{15}{2}\sqrt{3}$，

所以 $C_1M=\sqrt{C_1N^2+MN^2}=\frac{3}{2}\sqrt{87}$，..11 分

所以 $\cos\angle C_1MN=\frac{MN}{C_1M}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$,

即平面 DEC_1 与平面 ABC 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$．......12 分



解法 2：设 AC 的中点为 O，连结 BO，A_1O，

因为斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，$AC=AA_1$，$\angle A_1AC=60^\circ$，

所以 $\triangle A_1AC$ 为正三角形，$\therefore A_1O\perp AC$．

因为平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC 且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=AC$，

$A_1O\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC，

所以 $A_1O\perp OB, AO\perp OC$，

又因为在正三角形 ABC 中，$OB\perp AC$，..7 分

所以以 $\vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OA_1}$ 分别为 x, y, z 的正方向建立空间直角坐标系，如图.

由题意得 $A(0, -3, 0), B(3\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 3, 0), A_1(0, 0, 3\sqrt{3}), C_1(0, 6, 3\sqrt{3})$

所以 $D(0, -\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$，

所以 $\vec{DE}=\vec{AB}=(3\sqrt{3}, 3, 0), \vec{DC_1}=(0, \frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$，............................9 分

设平面 C_1DE 的法向量 $\vec{n}=(x, y, z)$,

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{DE}=0,\\ \vec{n}\cdot\vec{DC_1}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}3\sqrt{3}x+3y=0,\\ 5y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

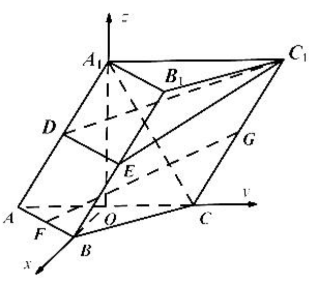
即 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}x\\ z=5x,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},5)$，.. 10 分

由题意知平面 ABC 的法向量为 $\vec{v}=(0, 0,1)$，

设平面 C_1DE 与平面 ABC 所成的锐二面角的大小为 θ,

则 $\cos\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{5}{\sqrt{29}\times 1}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$，.. 11 分

即面 C_1DE 与面 ABC 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$. .... 12 分



20.（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2a\cos B=2c-b$．

（1） 求 A；

（2） 若 $\triangle ABC$ 内一点 P 满足：$PB\perp PC$，$\angle APC=120°$，且 $AC=3AB=3$，

求 $\tan\angle ACP$．

【试题解析】

（1）解： 由正弦定理及 $2a\cos B=2c-b$，

得 $2\sin A\cos B=2\sin C-\sin B$，………………………………………………… 1 分

又 $A+B+C=180°$，所以 $\sin C=\sin(A+B)$，……………………………… 2 分

故 $2\sin A\cos B=2\sin(A+B)-\sin B=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B-\sin B$，

即 $2\cos A\sin B-\sin B=0$，……………………………………………………………3 分

又因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，…………………………………………… 4 分

又 $A\in(0°,180°)$，解得 $A=60°$．……………………………………………… 5 分

（2） 解法 1： 因为 $PB\perp PC$，$\angle APC=120°$，

所以 $\angle APB=150°$，………………………………………………………………6 分

设 $\angle ACP=\alpha$，

则 $\angle ABP=180°-A-\alpha-(\angle PBC+\angle PCB)$

$=180°-60°-90°-\alpha=30°-\alpha$，

即 $\angle ABP=30°-\alpha$，………………………………………………………………7 分

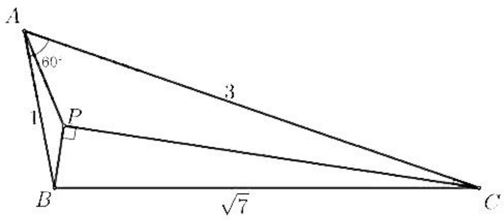
在 $\triangle APC$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{3}{\sin120°}=\dfrac{AP}{\sin\alpha}$；………………………8 分

在 $\triangle APB$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{1}{\sin 150^\circ}=\dfrac{AP}{\sin\left(30^\circ-\alpha\right)}$； 9 分

则 $AP=\dfrac{3\sin\alpha}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\sin\left(30^\circ-\alpha\right)}{\sin 150^\circ}$， …………………………………………… 10 分

所以 $3\sqrt{3}\sin\alpha=\cos\alpha$， …………………………………………………………… 11 分

解得 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$． …………………………………………………………………… 12 分



解法 2： 以 A 为圆心， AC 所在的直线为 x 轴，过点 A 且垂直于 x 轴的直线为 y 轴建立如图平面直角坐标系，则 $A(0,0)$， $C(3,0)$， $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$， ………………6 分

在△ABC 中，由余弦定理，得 $BC^2=1+9-2\times1\times3\cos 60^\circ=7$，

所以 $BC=\sqrt{7}$． ……………………………………………………………………… 7 分

又因为 $PB\perp PC$，则以 $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $C(3,0)$ 两点为直径端点的圆的方程是

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-3)+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)y=0$，即 $x^2+y^2-\dfrac{7}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{3}{2}=0$， ……8 分

又因为△APC 的外接圆圆心在 AC 的中垂线 $x=\dfrac{3}{2}$ 上，设其方程为

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$，

又由正弦定理，得△APC 外接圆的直径是

$2R=\dfrac{3}{\sin 120^\circ}=2\sqrt{3}$，解得 $R=\sqrt{3}$， ……………………………………………9 分

故而$\triangle APC$的外接圆方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=3$，

又因为此圆过 $A(0,0)$，所以$\frac{9}{4}+y_0^{\,2}=3$，

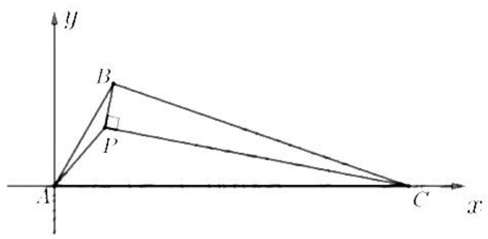
解得 $y_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ （舍去正值），…………………………………………………… 10 分

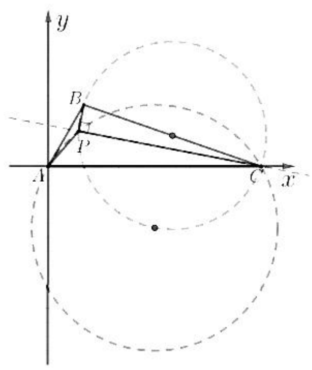
因为直线 PC 为圆 $x^2+y^2-\frac{7}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{2}=0$ 和 圆 $x^2+y^2-3x+\sqrt{3}y=0$

的公共弦，

所以直线PC的方程是 $x+3\sqrt{3}y-3=0$，…………………………………… 11 分

于是斜率为$k=-\tan\angle ACP=-\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}$． ……………………………… 12 分





21．（12分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且点 $A(0,1)$ 在 E 上．

（1）求 E 的方程；

（2）点 B 为 E 的下顶点，点 P 在 E 内且满足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，直线 AP 交 E 于点 Q，求 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}$ 的取值范围．

【试题解析】

（1）解：因为椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，……1分

因为点 $A(0,1)$ 在 E 上，所以 $b=1$．……2分

又因为 $a^2=b^2+c^2=1+c^2$，……3分

所以 $a=2$．

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$．……4分

（2）**解1：** 因为 B 为 E 的下顶点，所以 $B(0,-1)$．……5分

因为点 P 在 E 内，所以直线 AQ、BP 的斜率存在且不为0．……6分

设 AQ：$y=kx+1$，

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，所以 BP：$y=-\frac{1}{k}x-1$．

……（$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 转化为斜率乘积为-1）7分

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \\ y=kx+1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(1+4k^2)x^2+8kx=0$，

所以 $x_A+x_Q=-\dfrac{8k}{1+4k^2}$，所以 $x_Q=-\dfrac{8k}{1+4k^2}$，

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ y=-\dfrac{1}{k}x-1 \end{cases}$ 消去 y 得 $x_P=-\dfrac{2k}{k^2+1}$，……………………………………… 8 分

所以 $\overrightarrow{QP}=(x_P-x_Q,\ y_P-y_Q)=(x_P-x_Q,\ k(x_P-x_Q))$，

$\overrightarrow{QA}=(x_A-x_Q,\ y_A-y_Q)=(x_A-x_Q,\ k(x_A-x_Q))$，…………………………… 9 分

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}=(x_P-x_Q)(x_A-x_Q)+k^2(x_P-x_Q)(x_A-x_Q)=(1+k^2)(x_P-x_Q)(x_A-x_Q)$

$=(1+k^2)\left(-\dfrac{2k}{k^2+1}+\dfrac{8k}{1+4k^2}\right)\dfrac{8k}{1+4k^2}=\dfrac{48k^2}{16k^4+8k^2+1}$ …………… 10 分

$=\dfrac{48}{16k^2+\dfrac{1}{k^2}+8}$．

令 $t=16k^2+\dfrac{1}{k^2}\geq 8$，当且仅当 $k=\pm\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立；

$t+8\geq 16$，所以 $\dfrac{1}{t+8}\in(0,\ \dfrac{1}{16}]$

所以 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}$ 的取值范围为 $(0,\ 3]$．…………………………………………… 12 分

【说明：10 分-12 分求范围的过程，也可用导数求解；若有不严谨的地方（如利用基本不等式没有写“当且仅当……”，范围写成[0，3] 等，统一扣 1 分】

解 2： 因为 B 为 E 的下顶点，所以 $B(0,\ -1)$．……………………………………… 5 分

设 $Q(x,\ y)$（$-2\leq x\leq 2$ 且 $x\neq 0$），………………………… （x 的范围）6 分

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，所以 $PA\perp PB$，…………… （$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 的转化）7 分

所以由向量数量积的几何意义得

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}=|QP||QA|$，

$\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QA}=|QB||QA|\cos\angle BQP=|QP||QA|$，

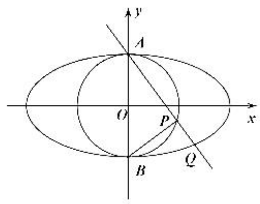
……………………………（几何意义 1 分，$|QB|\cos\angle BQP=|QP|$ 1 分）9 分

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QB}\cdot\overrightarrow{QA}=(-x,\ -1-y)\cdot(-x,\ 1-y)=x^2-1+y^2$

$=x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{4}$．……………………………………………………………… 10 分

又因为$-2\le x\le 2$ 且 $x\ne 0$，

所以$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}$的取值范围为$(0,\ 3]$．…………………………………………… 12 分



解 3： 因为B为E的下顶点，所以$B(0,\ -1)$．…………………………………………5 分

设$Q(x,\ y)$（$-2\le x\le 2$ 且 $x\ne 0$），…………………………（x的范围）6 分

因为$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，所以点$P$的轨迹是以$(0,\ 0)$为圆心，1为半径的圆（不含$A$，$B$两点），记为圆$O$．………………………………（$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$的转化）7 分

由向量数量积的几何意义得$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}=|QP||QA|$，…………………………8 分

过Q作圆O的切线，切点为T，则$|OT|=1$．

由切割线定理（圆幂定理）得$|QT|^2=|QP||QA|$，…………………………9 分

且$|QT|^2=|QO|^2-|OT|^2=x^2+y^2-1=x^2+1-\frac{x^2}{4}-1=\frac{3}{4}x^2$，…………10 分

因为$-2\le x\le 2$ 且 $x\ne 0$，所以$\frac{3}{4}x^2\in(0,\ 3]$，

所以$|QT|^2\in(0,\ 3]$．

所以$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}$的取值范围为$(0,\ 3]$．…………………………………………… 12 分

解 4： 同法一得 $x_Q=-\frac{8k}{1+4k^2}$，$x_P=-\frac{2k}{k^2+1}$，……………………………………… 8 分

$|QA|=\sqrt{(x_A-x_Q)^2+(y_A-y_Q)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_A-x_Q|$

$=\sqrt{1+k^2}\,\frac{|8k|}{1+4k^2}$，

$|QP|=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}=\sqrt{1+k^2}\,|x_P-x_Q|$

$=\sqrt{1+k^2}\left|-\frac{8k}{1-4k^2}+\frac{2k}{k^2+1}\right|=\sqrt{1+k^2}\,\frac{|-6k|}{(1-4k^2)(k^2+1)}$， …………9 分

所以 $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}=|QP||QA|=(1+k^2)\frac{|8k|}{1+4k^2}\cdot\frac{|-6k|}{(1+4k^2)(k^2+1)}=\frac{48k^2}{16k^4+8k^2+1}$.

…………………………………………………………………………………………10分

以下同解法一.

解 5： 因为 B 为 C 的下顶点，所以 $B(0,-1)$. ……………………………………5 分

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，所以点 P 的轨迹是以 $(0,0)$ 为圆心，1为半径的圆（不含 A，B 两点），记为圆 O：$x^2+y^2=1$. …………（$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 的转化）6 分

设直线 AP 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，α为直线 AP 倾斜角）.(*)

由对称性，不妨设 P，Q 位于 y 轴右侧，则$\alpha\in(0,\pi)$且$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$.

……………………………………………………………………（α的范围）7 分

将（*）式代入圆 O：$x^2+y^2=1$ 得 $t^2+2t\sin\alpha=0$，

则 $|AP|=|2\sin\alpha|$.

将（*）式代入 E：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $(1+3\sin^2\alpha)t^2+8t\sin\alpha=0$，

则 $|QA|=\left|\frac{8\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha}\right|$. ……………………………………………………8 分

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QA}=|QP||QA|=(|QA|-|AP|)|QA|=\left(\frac{8\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha}-2\sin\alpha\right)\frac{8\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$

$=\frac{48\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1+6\sin^2\alpha+9\sin^4\alpha}=\frac{48\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2+6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\sin^2\alpha+9\sin^4\alpha}$

$=\frac{48\tan^2\alpha}{16\tan^4\alpha+8\tan^2\alpha+1}=\frac{48k^2}{16k^4+8k^2+1}$. ……………………………10 分

以下同解法一.

22.（12 分） 已知函数 $f(x)=\ln x+a(x-e^x)+1$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

（1）当 $f'(1)=0$ 时，求 $f(x)$ 的最大值；

（2）讨论 $f(x)$ 的零点个数.

【试题解析】

（1）**解法 1：** 函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a(1-e^x)$，由 $f'(1)=0$，所以 $a=\dfrac{1}{e-1}>0$，……………1 分

令 $\varphi(x)=f'(x)$，则 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{x^2}-ae^x<0$，……………………………2 分

所以 $f'(x)$ 在$(0,+\infty)$ 单调递减，且 $f'(1)=0$，……………………………3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在$(1,+\infty)$ 单调递减，……………………4 分

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=0$．………………………………………………………5 分

解法 2： 由条件知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a(1-e^x)$，且 $f'(1)=0$，所以 $a=\dfrac{1}{e-1}$ 1 分

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1-e^x}{e-1}=\dfrac{(e-1)+x(1-e^x)}{(e-1)x}$，……………………………2 分

令 $g(x)=e-1+x(1-e^x)$，则 $g'(x)=1-(x+1)e^x$，

令 $h(x)=g'(x)=1-(x+1)e^x$，则 $h'(x)=-(x+2)e^x<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，即 $h(x)=g'(x)<h(0)=1-e<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，且 $g(1)=0$，……………………………3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在$(1,+\infty)$ 单调递减，……………………4 分

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=0$；………………………………………………………5 分

（2）**解法 1：** 由 $f(x)=\ln x+a(x-e^x)+1$ 得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a(1-e^x)$，

(1)当 $a\le 0$ 时，因为 $x>0$，所以 $1-e^x<0$，

即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

又当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to -\infty$，当 $x\to +\infty$，$f(x)\to +\infty$，

事实上， $f(1)=1+a(1-e)>0$，当 $x\in(0,1)$时，$x-e^x\in(1-e,-1)$，

所以 $f(x)<\ln x-1+a(1-e)$，所以当 $x<e^{a(e-1)-1}$ 时，$f(x)<0$，

所以 $f(x)$ 有一个零点，（没有取点扣 1 分）………………………………… 7 分

(2)当 $a>0$ 时，令 $\varphi(x)=f'(x)$，

则 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{x^2}-ae^x<0$，$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

且当 $x\to 0$ 时，$f'(x)\to +\infty$，当 $x\to +\infty$，$f'(x)\to -\infty$，

事实上，注意到当 $x\in(0,1)$时，$e^x\in(1,e)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a-ae^x>\dfrac{1}{x}+a(1-e)$，

所以当 $x\in(0,1)$且 $0<x<\dfrac{1}{a(e-1)}$ 时，$f'(x)>0$，

而当 $x>1$ 时，$\dfrac{1}{x}<1$，所以 $f'(x)<1+a-ae^x$，

所以当 $x>1$ 且 $x>\ln\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $\exists x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，则 $\dfrac{1}{x_0}+a=ae^{x_0}$，

且 $f'(1)=1+a(1-e)$，从而 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$单调递增，在 $(x_0,+\infty)$单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)$，………………………………………………………………………8 分

①当 $a=\dfrac{1}{e-1}$ 时，则 $f'(1)=1+a(1-e)=0$，

所以 $f(x)_{\max}=f(x_0)=f(1)=a(1-e)+1=0$，

所以 $f(x)$ 有唯一零点，…………………………………………………………………9 分

②当 $0<a<\dfrac{1}{e-1}$ 时，则 $f'(1)=1+a(1-e)>0$，所以 $x_0>1$，

从 而 $f(x)_{\max}=f(x_0)>f(1)>0$，

当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to -\infty$，当 $x\to +\infty$，$f(x)\to -\infty$，

事实上， $f(1)=a(1-\mathrm{e})+1>0$，

当 $x\in(0,\ 1)$ 时，$x-\mathrm{e}^x\in(1-\mathrm{e},\ -1)$，所以 $f(x)<\ln x+1-a$，

从而当 $x<\mathrm{e}^{a-1}$ 时，$f(x)<0$，

注意到 $\ln x<x-1$，

当 $x>1$ 时，$f(x)<x+ax-a\mathrm{e}^x<x+ax-a\left(\dfrac{x^2}{2}+x+1\right)=-\dfrac{a}{2}\left(x^2-\dfrac{2}{a}x+2\right)$，

所以当 $x\to +\infty$，$f(x)\to -\infty$（利用二次函数的性质），

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$，$(x_0,+\infty)$ 各有一个零点，

从而 $f(x)$ 有两个零点，……………………………………………………10 分

③当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ 时，则 $f'(1)=1+a(1-\mathrm{e})<0$，所以 $0<x_0<1$，

所以 $f(x_0)=\ln x_0+ax_0+1-a\mathrm{e}^{x_0}=\ln x_0+ax_0+1-\dfrac{1}{x_0}-a$，

令 $g(x)=\ln x+ax-\dfrac{1}{x}-a+1(0<x<1)$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+a>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $f(x_0)<0$，所以 $f(x)$ 无零点，………………12 分

综上，当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ 时，$f(x)$ 无零点；

当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ 或 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 有一个零点；

当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

注：**解法 1** 中三个“事实上”没有写清楚，不建议给满分（至少扣 1 分）. **解法 2：** 因为当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x>x$，

所以 $f(x)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x-x}$（注意 $\mathrm{e}^x>x$），……………………………6 分

令 $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x-x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\left(e^x-x\right)-(\ln x+1)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\dfrac{e^x\left(\frac{1}{x}-1\right)+\left(1-e^x\right)\ln x}{\left(e^x-x\right)^2}$，...7 分

当 $x\in(0,1)$ 时，$\frac{1}{x}-1>0$， $e^x>1$， $\ln x<0$，

所以 $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

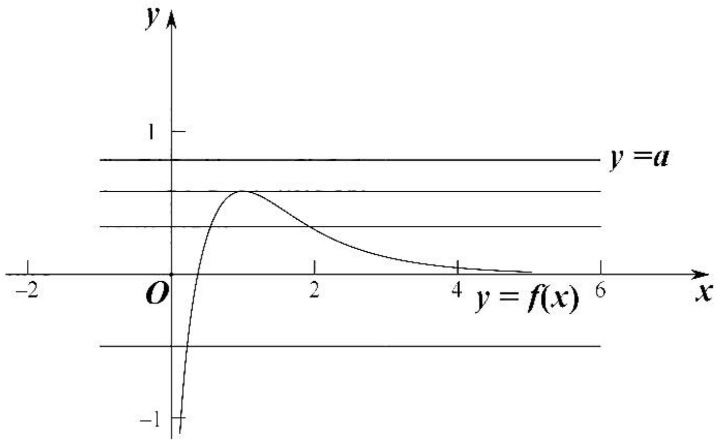
当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\frac{1}{x}-1<0$， $e^x>1$， $\ln x>0$，

所以 $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e-1}$，..9 分

又当 $x\to 0$ 时， $g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时， $g(x)\to 0$，..............10 分

其大致图象如下图：



综上，当 $a>\dfrac{1}{e-1}$ 时， $f(x)$ 无零点；

当 $a=\dfrac{1}{e-1}$ 或 $a\le 0$ 时， $f(x)$ 有一个零点；

当 $0<a<\dfrac{1}{e-1}$ 时， $f(x)$ 有两个零点. ....12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。