

高三数学

本试卷共8页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分 (选择题 共40分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 抛物线 $y^2 = x$ 的准线方程是

- (A) $x = -\frac{1}{2}$ (B) $x = -\frac{1}{4}$ (C) $y = -\frac{1}{2}$ (D) $y = -\frac{1}{4}$

(2) 在复平面内，复数 $\frac{1}{1+i}$ 对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 在 $(x-2)^5$ 的展开式中， x^4 的系数为

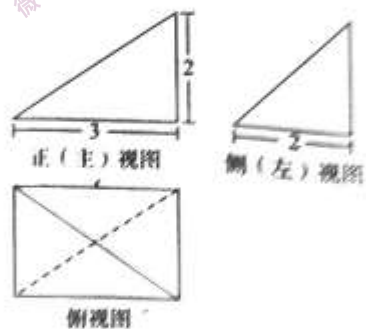
- (A) 5 (B) -5 (C) 10 (D) -10

(4) 已知直线 $l: x+ay+2=0$ ，点 $A(-1, -1)$ 和点 $B(2, 2)$ 。若 $l \parallel AB$ ，则实数 a 的值为

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

(5) 某三棱锥的三视图如图所示，该三棱锥的体积为

- (A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 12



(6) 已知向量 a, b 满足 $|a|=1$ ， $b=(-2, 1)$ ，且 $|a-b|=2$ ，则 $a \cdot b =$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1

(7) 已知 α, β 是两个不同的平面, “ $\alpha \parallel \beta$ ” 的一个充分条件是

- (A) α 内有无数条直线平行于 β
- (B) 存在平面 $\gamma, \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$
- (C) 存在平面 $\gamma, \alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n, \text{ 且 } m \parallel n$
- (D) 存在直线 $l, l \perp \alpha, l \perp \beta$

(8) 已知函数 $f(x) = 1 - 2\sin^2(x + \frac{\pi}{4})$, 则

- (A) $f(x)$ 是偶函数
- (B) 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- (C) 曲线 $y = f(x)$ 关于直线 $x = -\frac{\pi}{4}$ 对称
- (D) $f(1) > f(2)$

(9) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 - 3n, n \in \mathbf{N}$, 前 n 项和为 S_n . 给出下列三个结论:

- ① 存在正整数 $m, n (m \neq n)$, 使得 $S_m = S_n$;
- ② 存在正整数 $m, n (m \neq n)$, 使得 $a_m + a_n = 2\sqrt{a_m a_n}$;
- ③ 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则数列 $\{T_n\}$ 有最小项. 其中所有正确结论的序号是

- (A) ①
- (B) ③
- (C) ①③
- (D) ①②③

(10) 如图所示, 在圆锥内放入两个球 O_1, O_2 , 它们都与圆锥相切 (即与圆锥的每条母线相切),

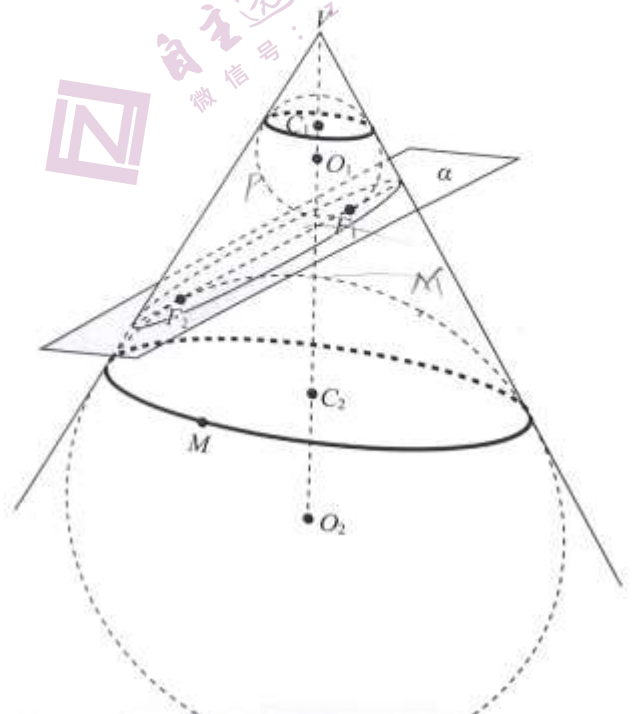
切点圆 (图中粗线所示) 分别为 $\odot C_1, \odot C_2$. 这两个球都与平面 α 相切, 切点分别为 F_1, F_2 ,

丹德林 (G.Dandelin) 利用这个模型证明了平面 α 与圆锥侧面的交线为椭圆, F_1, F_2 为此椭圆的两个焦点. 这两个球也称为 Dandelin 双球. 若圆锥的母线与它的轴的

夹角为 $30^\circ, \odot C_1, \odot C_2$ 的半径分别为 1, 4, 点 M 为 $\odot C_2$ 上的一个定点, 点 P 为椭圆上的一个动点, 则从点 P 沿圆锥表面到达点 M 的路线长与线段 PF_1 的长之和的最小值是

最小值是

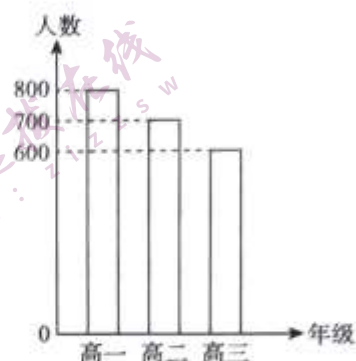
- (A) 6
- (B) 8
- (C) $3\sqrt{3}$
- (D) $4\sqrt{3}$



第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

- (11) 在“互联网+”时代，国家积极推动信息化技术与传统教学方式的深度融合，实现线上、线下融合式教学模式变革。某校高一、高二和高三学生人数如图所示。采用分层抽样的方法调查融合式教学模式的实施情况，在抽取的样本中，高一学生有16人，则该样本中的高三学生人数为_____。



- (12) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $-S_1, S_2, a_3$ 成等差数列，则数列 $\{a_n\}$ 的公比为_____。
- (13) 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 $M(-3, 4)$ ，则该双曲线的渐近线方程为_____； $|MF_1| - |MF_2| =$ _____。
- (14) 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数，且 $x \leq 0$ 时， $f(x) = ae^x - 1$ ，则 $a =$ _____， $f(x)$ 的值域是_____。
- (15) 已知圆 $P: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 2$ ，直线 $l: y = ax$ ，点 $M(5, 2 + \sqrt{2})$ ，点 $A(s, t)$ 。给出下列四个结论：
- ① 当 $a=0$ 时，直线 l 与圆 P 相离；
 - ② 若直线 l 是圆 P 的一条对称轴，则 $a = \frac{2}{5}$ ；
 - ③ 若直线 l 上存在点 A ，圆 P 上存在点 N ，使得 $\angle MAN = 90^\circ$ ，则 a 的最大值为 $\frac{20}{21}$ ；
 - ④ N 为圆 P 上的一个动点，若 $\angle MAN = 90^\circ$ ，则 t 的最大值为 $\frac{5\sqrt{2}+8}{4}$ 。
- 其中所有正确结论的序号是_____。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

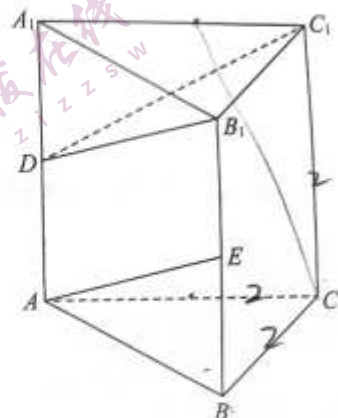
(16) (本小题共 15 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BCC_1B_1 为矩形， $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ， D, E 分别是棱 AA_1, BB_1 的中点。

(I) 求证： $AE \parallel$ 平面 B_1C_1D ;

(II) 求证： $CC_1 \perp$ 平面 ABC ;

(III) 若 $AC=BC=AA_1=2$ ，求直线 AB 与平面 B_1C_1D 所成角的正弦值。



(17) (本小题共 14 分)

若存在 $\triangle ABC$ 同时满足条件①、条件②、条件③、条件④中的三个，请选择一组这样的三个条件并解答下列问题：

(I) 求 $\angle A$ 的大小；

(II) 求 $\cos B$ 和 a 的值。

条件①： $\sin C = \frac{3\sqrt{3}}{14}$;

条件②： $a = \frac{7}{3}c$;

条件③： $b - a = 1$;

条件④： $b \cos A = -\frac{5}{2}$.

(18) (本小题共 14 分)

某公司在 2013~2021 年生产经营某种产品的相关数据如下表所示:

年 份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
年生产台数 (单位: 万台)	3	4	5	6	6	9	10	10	a
年返修台数 (单位: 台)	32	38	54	58	52	71	80	75	b
年利润 (单位: 百万元)	3.85	4.50	4.20	5.50	6.10	9.65	10.00	11.50	c

注: 年返修率 = $\frac{\text{年返修台数}}{\text{年生产台数}}$

- (I) 从 2013~2020 年中随机抽取一年, 求该年生产的产品的平均利润不小于 100 元/台的概率;
- (II) 公司规定: 若年返修率不超过千分之一, 则该公司生产部门当年考核优秀. 现从 2013~2020 年中随机选出 3 年, 记 ξ 表示这 3 年中生产部门获得考核优秀的次数, 求 ξ 的分布列和数学期望;
- (III) 记公司在 2013~2015 年, 2016~2018 年, 2019~2021 年的年生产台数的方差分别为 s_1^2 , s_2^2 , s_3^2 . 若 $s_3^2 \leq \max\{s_1^2, s_2^2\}$, 其中 $\max\{s_1^2, s_2^2\}$ 表示 s_1^2, s_2^2 这两个数中最大的数. 请写出 a 的最大值和最小值. (只需写出结论)
- (注: $s^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 其中 \bar{x} 为数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数)

(19) (本小题共 14 分)

已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且经过点 $C(2, \sqrt{3})$.

(I) 求椭圆 W 的方程及其长轴长;

(II) A, B 分别为椭圆 W 的左、右顶点, 点 D 在椭圆 W 上, 且位于 x 轴下方, 直线 CD 交 x 轴于点 Q . 若 $\triangle ACQ$ 的面积比 $\triangle BDQ$ 的面积大 $2\sqrt{3}$, 求点 D 的坐标.

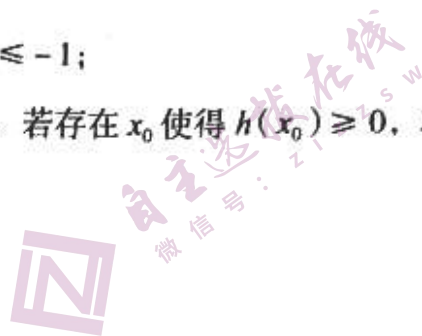
(20) (本小题共 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 设 $g(x) = f(x) - x$, 求证: $g(x) \leq -1$;

(III) 设 $h(x) = f(x) - x^2 + 2ax - 4a^2 + 1$. 若存在 x_0 使得 $h(x_0) \geq 0$, 求 a 的最大值.



(21) (本小题共 14 分)

设 A 是由 $n \times n$ ($n \geq 2$) 个实数组成的 n 行 n 列的数表, 满足: 每个数的绝对值是 1, 且所有数的和是非负数, 则称数表 A 是 “ n 阶非负数表”.

(I) 判断如下数表 A_1, A_2 是否是 “4 阶非负数表”;

1	1	-1	-1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	1	-1	-1

数表 A_1

-1	-1	-1	-1
1	1	1	-1
1	-1	1	-1
1	1	-1	-1

数表 A_2

(II) 对于任意 “5 阶非负数表” A , 记 $R(s)$ 为 A 的第 s 行各数之和 ($1 \leq s \leq 5$), 证明:

存在 $\{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 使得 $R(i) + R(j) + R(k) \geq 3$;

(III) 当 $n=2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 时, 证明: 对于任意 “ n 阶非负数表” A , 均存在 k 行 k 列, 使得这 k 行 k 列交叉处的 k^2 个数之和不小于 k .

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

