绝密★启用前

2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(三)

文科数学

考生注意：

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-5x+4<0\}$,$B=\{x|-1<x<3\}$,则 $A\cap B=$

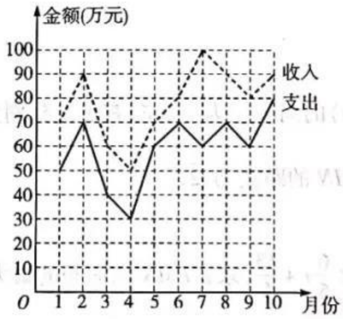
A. $\{x|1<x<3\}$　　B. $\{x|-1<x<4\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$　　D. $\{x|3<x<4\}$

2. 已知 $zi=3+i^5$,则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

3. 某超市今年 1 月至 10 月各月的收入、支出(单位:万元)情况的统计如图所示,下列说法中错误的是



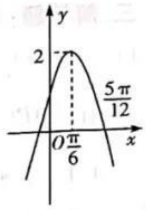
A. 收入和支出最低的都是 4 月　　B. 利润(收入 - 支出)最高为 40 万元

C. 前 5 个月的平均支出为 50 万元　　D. 收入频数最高的是 70 万元

4. 三国时期的吴国数学家赵爽根据一幅"勾股圆方图",用数形结合的方法给出了勾股定理的详细证明,他所绘制的勾股圆方图被后世称为"赵爽弦图".如图所示的图形就是根据赵爽弦图绘制而成的,图中的四边形都是正方形,三角形都是相似的直角三角形,且两条直角边长之比均为 2.现从整个图形内随机取一点,则该点取自小正方形(阴影部分)内的概率为

A. $\frac{1}{9}$　B. $\frac{1}{25}$　C. $\frac{1}{16}$　D. $\frac{1}{36}$

5. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则其解析式可以是



A. $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$　　B. $f(x)=2\sin\left(-2x+\frac{5\pi}{6}\right)$

C. $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$　　D. $f(x)=2\sin\left(-x+\frac{2\pi}{3}\right)$

6. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1a_3=\frac{1}{4}$，$a_2a_4=1$，则 $a_{11}=$

A. 64　　B. 128　　C. 256　　D. 512

7. 已知变量 y 关于变量 x 的回归方程为 $\hat{y}=e^{bx-0.5}$，其一组数据如下表所示：

x	1	2	3	4
y	e	e^3	e^4	e^6

若 $\hat{y}=e^{9.1}$，则 $x=$

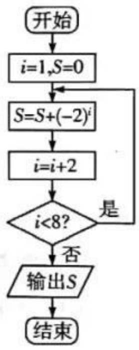
A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

8. 已知直线 $l:3x-4y+m=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-6x+4y-3=0$ 有公共点，则实数 m 的取值范围为

A. $(3,37)$　　B. $[-37,3]$　　C. $[3,4]$　　D. $[-4,4]$

9. 执行如图所示的程序框图，输出 S 的值为

A. 42　　B. -42　　C. -170　　D. -682



10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，左、右焦点分别为 F_1,F_2，A 在 C 的左支上，$AF_1\perp x$ 轴，A,B 关于原点对称，四边形 AF_1BF_2 的面积为 48，则 $|F_1F_2|=$

A. 8　　B. 4　　C. $8\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

11. 若实数 a,b 满足 $2^a=2-a$，$\log_2(b-1)=3-b$，则 $a+b=$

A. 3　　B. $\frac{10}{3}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. 4

12. 某圆锥的侧面展开图是一个圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$，面积为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形，则该圆锥的外接球的表面积为

A. $\frac{27\sqrt{2}\pi}{64}$　　B. $\frac{27\pi}{16}$　　C. $\frac{9\pi}{8}$　　D. $\frac{3\pi}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-3y+6\geq 0,\\ 3x+y-3\leq 0,\\ x+3y+3\geq 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-2y$ 的最大值为________.

14. 已知 $A(1,0)$，$B(m,2)$，$C(0,5)$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{25}{4}$，则 $m=$________.

15. 已知曲线 $y=e^x+x+2$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与曲线 $y=x^2+kx+7$ 也相切，则实数 $k=$________.

16. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，以 $P(-2,0)$ 为圆心，半径为 5 的圆与抛物线 C 交于 A,B 两点，若 $|OA|=\sqrt{17}$（点 O 为坐标原点），则 $p=$________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\frac{\sin A}{a}+\frac{\sin B}{b}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$.

（Ⅰ）求$\sin C$和$\cos C$；

（Ⅱ）若$a=\sqrt{5}b$，$\triangle ABC$的面积为 2，求c.

18.（12 分）

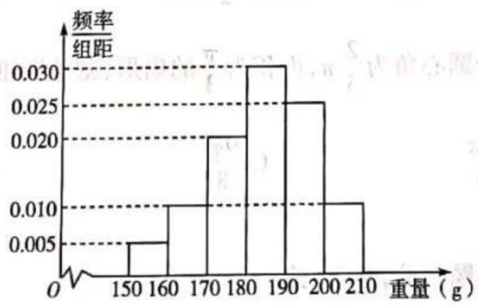
已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等比数列，$a_1=5$，$S_{10}=185$，$a_1b_1=5$，$a_2b_2^3=1$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和T_n.

19.（12 分）

某河蟹养殖场今年在临近收获前，随机抽取了 100 只河蟹逐个称重，重量（单位：g）数据经过整理得到如下的频率分布直方图. 规定重量不低于 190 g 的为优等蟹，重量低于 190 g 的为普通蟹.



（Ⅰ）估计今年的河蟹为优等蟹的概率；

（Ⅱ）估计今年河蟹重量的中位数；

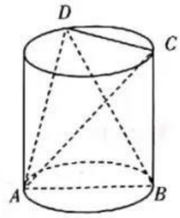
（Ⅲ）该养殖场今年一共收获了 10 000 只河蟹，根据市场行情，优等蟹按数量卖，价格为 20 元一只，普通蟹按重量卖，价格为 60 元/kg，估计该养殖场今年的销售额.（每组数据以该组区间的中点值为代表）

20. (12 分)

如图所示,四面体 $ABCD$ 的顶点都在圆柱的上、下底面圆周上,且 AB 是下底面圆的直径,BC 是圆柱的母线.

(Ⅰ)求证:$AD\perp CD$;

(Ⅱ)若 $AB=BC$,异面直线 AB 与 CD 所成的角为 $30°$,且圆柱的侧面积为 4π,求四面体 $ABCD$ 的体积.



21. (12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)若 $a=1$,证明:$f(x)>\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x}-x^2$.

22. (12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,左、右焦点分别为 F_1,F_2,过点 F_1 和点 $(0,1)$ 的直线与椭圆交于 M,N 两点,F_2 到直线 MN 的距离为 $\sqrt{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)若点 $P(0,t)$ 满足 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}\leqslant\frac{6}{5}t+\frac{33}{5}$,求 $\triangle PMN$ 的面积的最大值.

天一大联考
2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(三)
文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案　A

命题意图　本题考查一元二次不等式的解法,交集运算.

解析　由 $x^2-5x+4<0$ 得 $1<x<4$,所以 $A=\{x|1<x<4\}$,所以 $A\cap B=\{x|1<x<3\}$.

2. 答案　D

命题意图　本题考查复数的四则运算.

解析　因为 $zi=3+i^5$,所以 $z=\frac{3+i}{i}=1-3i$,所以 z 在复平面内对应的点为 $(1,-3)$,位于第四象限.

3. 答案　D

命题意图　本题考查统计图表的实际运用.

解析　对于 A,由折线图知,收入和支出最低的都是 4 月,故 A 正确.对于 B,利润最高的是 7 月份,为 40 万元,故 B 正确.对于 C,前 5 个月的支出(单位:万元)分别为 50,70,40,30,60,平均数为 50 万元,故 C 正确.对于 D,收入(单位:万元)为 100,90,80,70,60,50 的频数分别为 1,3,2,2,1,1,因此收入频数最高的为 90 万元,D 错误.

4. 答案　B

命题意图　本题考查数学文化,几何概型.

解析　设小正方形的边长为 1,则与小正方形相邻的四个直角三角形的直角边长分别为 2 和 1,从而可得斜边长为 $\sqrt{5}$,外围较大的直角三角形的直角边长分别为 $2\sqrt{5}$ 和 $\sqrt{5}$,于是大正方形的边长为 5,根据几何概型的概率计算公式可知所求概率为 $\frac{1^2}{5^2}=\frac{1}{25}$.

5. 答案　B

命题意图　本题考查三角函数的图象性质.

解析　由图知 $f(x)$ 的最小正周期 $T=4\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$,所以 $\omega=\pm2$,排除 C,D. 将 $\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ 分别代入到 A,B 选项中,可知 B 满足条件.

6. 答案　C

命题意图　本题考查等比数列的性质,基本量的计算.

解析　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$,由已知条件可得 $\begin{cases}a_1^2q^2=\frac{1}{4},\\a_1^2q^4=1,\end{cases}$ 解得 $q=2,a_1=\frac{1}{4}$. 所以 $a_n=2^{n-3}$,所以 $a_{11}=2^8=256$.

7. 答案　B

命题意图　本题考查回归方程的实际运用.

解析　由 $\hat{y}=e^{bx-0.5}$,得 $\ln\hat{y}=bx-0.5$,令 $z=\ln y$,则 $\hat{z}=bx-0.5$. $\bar{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=2.5$,$\bar{z}=\frac{1+3+4+6}{4}=3.5$,因为 $(\bar{x},\bar{z})$ 满足 $\hat{z}=bx-0.5$,所以 $3.5=b\times2.5-0.5$,解得 $b=1.6$,所以 $\hat{z}=1.6x-0.5$,所以 $\hat{y}=e^{1.6x-0.5}$,令 $e^{1.6x-0.5}=e^{9.1}$,解得 $x=6$.

8. **答案** B

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 因为圆 C 的标准方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=16$，所以 $C(3,-2)$，半径 $r=4$，所以点 C 到直线 $l:3x-4y+m=0$ 的距离为 $\dfrac{|9+8+m|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|17+m|}{5}$，根据题意可知 $\dfrac{|17+m|}{5}\leqslant 4$，解得 $-37\leqslant m\leqslant 3$.

9. **答案** C

命题意图 本题考查程序框图，当型循环结构.

解析 因为 $i=1,S=0$，第一次循环：$S=0+(-2)^1=-2,i=1+2=3$；第二次循环：$S=-2+(-2)^3=-10,i=3+2=5$；第三次循环：$S=-10+(-2)^5=-42,i=5+2=7$；第四次循环：$S=-42+(-2)^7=-170,i=7+2=9>8$，终止循环，所以输出 S 的值为 -170.

10. **答案** A

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 设 $|F_1F_2|=2c$，将 $x=-c$ 代入双曲线方程，可得 $|AF_1|=\dfrac{b^2}{a}$，四边形 AF_1BF_2 是平行四边形，面积 $S=\dfrac{b^2}{a}\times 2c=\dfrac{2b^2c}{a}=48$，又因为 $\dfrac{c}{a}=2,c^2-a^2=b^2$，得 $c=4$，所以 $|F_1F_2|=8$.

11. **答案** A

命题意图 本题考查指数函数和对数函数的性质.

解析 由条件可知 $2^a+a=2,(b-1)+\log_2(b-1)=2$，因为函数 $y=2^x+x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因此方程 $2^x+x=2$ 有唯一实根，因此 $a=\log_2(b-1),2^a=b-1$，所以 $2-a=b-1$，因此 $a+b=3$.

12. **答案** C

命题意图 本题考查圆锥的性质，球的性质与表面积.

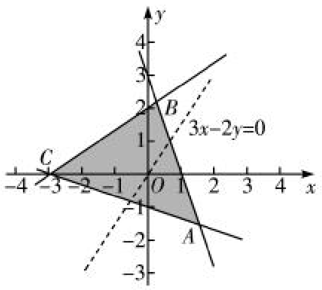
解析 设圆锥的母线长为 l，则侧面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{3}l^2=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $l=1$. 设圆锥的底面半径为 r，则 $2\pi r=\dfrac{2\pi}{3}l$，所以 $r=\dfrac{1}{3}$，所以圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，因为 $h>r$，所以球心在圆锥的高上. 设外接球的半径为 R，由 $R^2=(h-R)^2+r^2$，得 $R^2=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-R\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$，解得 $R=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$，所以球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2=\dfrac{9\pi}{8}$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $\dfrac{15}{2}$

命题意图 本题考查不等式组表示的平面区域，线性目标函数的最值.

解析 如图所示，作出不等式组表示的平面区域，平移直线 $3x-2y=0$，当经过点 A 时，目标函数 $z=3x-2y$ 取得最大值. 解方程组 $\begin{cases}3x+y-3=0,\\ x+3y+3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\ y=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 即 $A\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，所以 $z_{\max}=3\times\dfrac{3}{2}-2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{15}{2}$.



14. **答案** $\frac{1}{2}$

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算、数量积运算.

解析 由条件得$\overrightarrow{AB}=(m-1,2)$,$\overrightarrow{BC}=(-m,3)$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(m-1,2)\cdot(-m,3)=-m^2+m+6=\frac{25}{4}$,解得$m=\frac{1}{2}$.

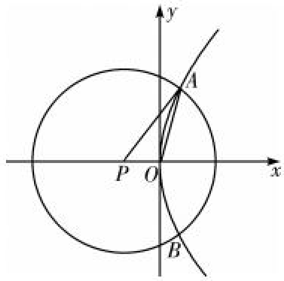
15. **答案** -2或6

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 设$f(x)=e^x+x+2$,则$f'(x)=e^x+1$,$f'(0)=e^0+1=2$,又因为$f(0)=3$,所以切线方程为$y=2x+3$,因为曲线$y=x^2+kx+7$是抛物线,直线与抛物线相切,所以方程$x^2+kx+7=2x+3$有两个相等的实数根,$\Delta=(k-2)^2-16=0$,解得$k=-2$或6.

16. **答案** 8

命题意图 本题考查抛物线的性质、余弦定理.



解析 如图,在$\triangle AOP$中,$|AP|=5$,$|OP|=2$,$|OA|=\sqrt{17}$,由余弦定理得$\cos\angle AOP=-\frac{\sqrt{17}}{17}$,所以$\cos\angle AOx=\frac{\sqrt{17}}{17}$,所以$A(1,4)$,代入方程$y^2=2px(p>0)$,可得$p=8$.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正弦定理、余弦定理的应用.

解析 (Ⅰ)由余弦定理,原式化为$\frac{\sin A}{a}+\frac{\sin B}{b}=\frac{\cos C}{c}$,

再由正弦定理可得$\frac{\sin A}{\sin A}+\frac{\sin B}{\sin B}=\frac{\cos C}{\sin C}=2$, ……(2分)

又因为$\sin^2C+\cos^2C=1$,$C\in(0,\pi)$,

可得$\sin C=\frac{\sqrt5}{5}$,$\cos C=\frac{2\sqrt5}{5}$. ……(5分)

(Ⅱ)因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2$,所以$ab=4\sqrt5$, ……(6分)

因为$a=\sqrt5 b$,所以$a=2\sqrt5$,$b=2$. ……(7分)

由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=20+4-2\times2\sqrt5\times2\times\frac{2\sqrt5}{5}=8$, ……(9分)

所以$c=2\sqrt2$. ……(10分)

18. **命题意图** 本题考查等差数列、等比数列的性质,分组法求数列的前n项和.

解析 (Ⅰ)设$\{a_n\}$的公差为d,$\{b_n\}$的公比为q.

因为$a_1=5$,$S_{10}=10a_1+45d=185$,解得$d=3$. ……(2分)

所以$a_n=5+3(n-1)=3n+2$. ……(3分)

由$a_1b_1=5$得$b_1=1$,由$a_2b_2^2=1$得$b_2=\frac{1}{2}$,所以$\{b_n\}$的公比$q=\frac{1}{2}$, ……(5分)

所以$b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$. ……(6分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$a_nb_n=(3n+2)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$,

所以$T_n=5\times1+8\times\frac{1}{2}+11\times\frac{1}{2^2}+\cdots+(3n+2)\times\frac{1}{2^{n-1}}$,

所以$\frac{1}{2}T_n=5\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{2^2}+11\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(3n+2)\times\frac{1}{2^n}$，…………（8分）

两式相减得$\frac{1}{2}T_n=2+3+3\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots+3\times\frac{1}{2^{n-1}}-(3n+2)\times\frac{1}{2^n}$

$$=2+3\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-(3n+2)\times\frac{1}{2^n}$$

$=8-\frac{3n+8}{2^n}$. …………（10分）

所以 $T_n=16-\frac{3n+8}{2^{n-1}}$. …………（12分）

19. **命题意图** 本题考查频率分布直方图的相关计算、用样本估计总体的统计思想.

解析 （Ⅰ）估计今年的河蟹为优等蟹的概率为 $P=(0.025+0.010)\times10=0.35$. …………（3分）

（Ⅱ）设中位数为 x，由频率分布直方图可知 $x\in[180,190)$，…………（4分）

且 $(0.005+0.010+0.020)\times10+0.030\times(x-180)=0.5$. …………（6分）

解得 $x=185$. …………（7分）

（Ⅲ）估计今年优等蟹的数量为 $0.35\times10\ 000=3\ 500$（只），…………（8分）

普通蟹的总重量为 $(155\times0.05+165\times0.1+175\times0.2+185\times0.3)\times10\ 000=1\ 147\ 500$ g，即 1 147.5 kg，

…………（10分）

所以估计该养殖场今年的销售额为 $3\ 500\times20+1\ 147.5\times60=138\ 850$ 元. …………（12分）

20. **命题意图** 本题考查圆柱的结构特征、空间位置关系的证明以及体积的计算.

解析 （Ⅰ）如图，过点 D 作圆柱的母线 DE，连接 AE，BE. …………（1分）

因为母线 DE 与底面垂直，所以 $DE\perp BE$，

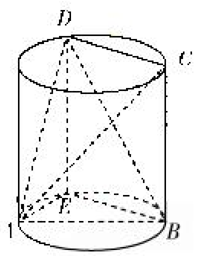
因为 AB 是底面圆的直径，所以 $AE\perp BE$，…………（2分）

又 $AE\cap DE=E$，所以 $BE\perp$ 平面 AED，…………（3分）

由 $DE/\!/BC$ 且 $DE=BC$，可知 $CD/\!/BE$，所以 $CD\perp$ 平面 AED，

又 $AD\subset$ 平面 AED，

所以 $AD\perp CD$. …………（5分）



（Ⅱ）圆柱侧面积为 $\pi\cdot AB\cdot BC=4\pi$，所以 $AB=BC=2$. …………（7分）

因为异面直线 AB 和 CD 所成的角为 $30°$，所以 $\angle ABE=30°$，所以 $AE=1$，$BE=\sqrt{3}$. …………（8分）

因为 $DE/\!/BC$，所以 D 点与 E 点到平面 ABC 的距离相等，

因为 $BC\perp$ 平面 ABE，所以平面 $ABC\perp$ 平面 ABE，点 E 到平面 ABC 的距离转化为点 E 到 AB 的距离.

在 Rt△ABE 中，可得点 E 到 AB 的距离为 $d=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………（10分）

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}dS_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{\sqrt{3}}{3}$. …………（12分）

21. **命题意图** 本题考查导数的计算以及利用导数研究函数的性质.

解析 （Ⅰ）由题易知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{a}{x}-2x=\frac{a-2x^2}{x}$，……………………（1分）

当$a\leqslant 0$时，$f'(x)<0$恒成立，因此$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. ……………………（2分）

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得$x=\sqrt{\frac{a}{2}}$，令$f'(x)>0$，得$0<x<\sqrt{\frac{a}{2}}$，令$f'(x)<0$，得$x>\sqrt{\frac{a}{2}}$，

故$f(x)$在$\left(0,\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递减. ……………………（4分）

综上所述，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当$a>0$时，$f(x)$在$\left(0,\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递减. ……………………（5分）

（Ⅱ）当$a=1$时，$f(x)=\ln x-x^2$，

不等式$f(x)>\frac{1}{e^x}-\frac{1}{x}-x^2$即$\ln x+\frac{1}{x}>\frac{1}{e^x}$，……………………（6分）

令$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，则$g'(x)=\frac{x-1}{x^2}$.

令$g'(x)=0$，得$x=1$.

所以当$x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

所以$g(x)\geqslant g(1)=1$. ……………………（9分）

又当$x>0$时，$\frac{1}{e^x}<1$，……………………（10分）

所以$\ln x+\frac{1}{x}>\frac{1}{e^x}$. ……………………（11分）

故原不等式得证. ……………………（12分）

22. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质，直线与椭圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）设$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$c>0$.

直线MN过点F_1和点$(0,1)$，则其方程为$y=\frac{1}{c}x+1$，……………………（1分）

因为F_2到直线MN的距离为$\sqrt{2}$，所以$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{c^2}+1}}=\sqrt{2}$，解得$c=1$. ……………………（3分）

由$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$得$a=\sqrt{3}$，所以$b^2=a^2-c^2=3-1=2$，……………………（4分）

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………（5分）

（Ⅱ）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由（Ⅰ）知直线MN的方程为$y=x+1$，由$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=x+1\end{cases}$消去$y$得$5x^2+6x-3=0$，

所以$x_1+x_2=-\frac{6}{5}$，$x_1x_2=-\frac{3}{5}$，……………………（6分）

所以$y_1+y_2=-\frac{6}{5}+2=\frac{4}{5}$，$y_1y_2=x_1x_2+x_1+x_2+1=-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}+1=-\frac{4}{5}$.

所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(x_1,y_1-t)\cdot(x_2,y_2-t)=x_1x_2+y_1y_2-t(y_1+y_2)+t^2$

$=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}t+t^2=t^2-\frac{4}{5}t-\frac{7}{5}$, ………………………………………………………（8 分）

根据条件$t^2-\frac{4}{5}t-\frac{7}{5}\leqslant\frac{6}{5}t+\frac{33}{5}$,解得$-2\leqslant t\leqslant4$. ………………………………………………（9 分）

又因为$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{6}}{5}$,

所以$\triangle PMN$的面积$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|x_1-x_2||t-1|=\frac{2\sqrt{6}}{5}|t-1|$. ………………………………………………（11 分）

当$t=-2$或$t=4$时,$\triangle PMN$的面积最大,最大值为$\frac{6\sqrt{6}}{5}$. …………………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。