2023年高三下学期5月三校联考

高三数学试卷

命题学校：宜昌一中　命题教师：高三数学备课组　审题学校：荆州中学、龙泉中学

考试时间：2023年5月18日下午15:00—17:00　　试卷满分：150分

★祝考试顺利★

一、选择题：本大题共8小题，每一小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\mid a<x<2,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，若 $A\cap B$ 中恰有两个元素，则实数 a 的取值范围为

A．$[-1,0)$　　B．$[-1,0]$　　C．$[0,1)$　　D．$[0,1]$

2．已知复数 $2+\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax-b=0$（$a,b\in\mathbf{R}$）的一个解，则复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$．若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=3\sqrt{2}$，则 $|\boldsymbol{c}|=$

A．$\sqrt{10}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．$5\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{5}$

4．由经验可知，某种质地的沙子堆放成圆锥的形状，若要使沙堆上的沙子不滑落，其母线与底面的最大夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$．现有一堆该质地的沙子堆成的沙堆，该沙堆的底面半径为 $3\,\mathrm{m}$，高为 $1\,\mathrm{m}$．现在为了节省该沙堆的占地，需要用一个无盖的圆柱形容器盛放这些沙子，沙子可以超出该容器，且超出部分呈圆锥形．已知该容器的底面半径为 $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$，则该容器的高至少为

A．$1\,\mathrm{m}$　　B．$\dfrac{2}{3}\,\mathrm{m}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{m}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m}$

5．若 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\cos(\alpha-\dfrac{2\pi}{5})+2\cos\alpha=4\cos\alpha\cdot\cos^2\dfrac{\pi}{5}$，则 α 等于

A．$\dfrac{2\pi}{5}$　　B．$\dfrac{3\pi}{10}$　　C．$\dfrac{\pi}{5}$　　D．$\dfrac{\pi}{10}$

6．某同学喜爱球类和游泳运动．在暑假期间，该同学上午去打球的概率为 $\dfrac{1}{3}$．若该同学上午不去打球，则下午一定去游泳；若上午去打球，则下午去游泳的概率为 $\dfrac{1}{4}$．已知该同学在某天下午去游了泳，则上午打球的概率为

A．$\dfrac{3}{4}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{1}{2}$

7．已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与 E 交于点 A，B．直线 l 为 E 在点 A 处的切线，点 B 关于 l 的对称点为 M．由椭圆的光学性质知，F_1，A，M 三点共线．若 $|AB|=a$，$\dfrac{|BF_1|}{|MF_1|}=\dfrac{5}{7}$，则 $\dfrac{|BF_2|}{|AF_1|}=$

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{2}{7}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{7}$

8．设函数 $f(x)=2x^3-2x$，若正实数 a 使得存在三个两两不同的实数 b，c，d 满足 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(c,f(c))$，$(d,f(d))$ 恰好为一个矩形的四个顶点，则 a 的取值范围为

A．$(0,\frac{1}{2}]$　　B．$[\frac{1}{2},1]$　　C．$(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D．$[\frac{\sqrt{3}}{3},1]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长相等，M，N 分别是棱 PD，BC 的中点，则

A．$MN \parallel PB$　　B．$MN \parallel$ 面 PAB

C．$MN \perp PA$　　D．$MN \perp$ 面 PAD

10．某学校一同学研究温差 $x(°C)$ 与本校当天新增感冒人数 y（人）的关系，该同学记录了 5 天的数据：

x	5	6	8	9	12
y	17	20	25	28	35

经过拟合，发现基本符合经验回归方程 $\hat{y}=2.6x+\hat{a}$，则

A．样本中心点为 $(8,25)$　　B．$\hat{a}=4.2$

C．$x=5$ 时，残差为 -0.2　　D．若去掉样本点 $(8,25)$，则样本的相关系数 r 增大

11．已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 在 $(0,\frac{\varphi}{2})$ 上有最大值，则

A．φ 的取值范围为 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$　　B．$f(x)$ 在区间 $(0,\varphi)$ 上有零点

C．$f(x)$ 在区间 $(\frac{\varphi}{2},\varphi)$ 上单调递减　　D．存在两个 φ，使得 $\varphi-f(\varphi)=1$

12．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(x_1,y_1)(y_1>0)$ 是圆 $M:(x-2)^2+y^2=1$ 上的一个动点，直线 OP 与圆 M 交于另一点 Q，过点 O 作直线 OP 的一条垂线，与圆 $N:(x+2)^2+y^2=4$ 交于点 $E(x_2,y_2)$，则下列说法正确的是

A．$x_2>-1$　　B．$4y_1=OP\cdot OE$

C．若 $PQ=OE$，则 $S_{\triangle NOE}=3S_{\triangle MPQ}$　　D．$\angle PEQ$ 的最大正切值为 $\frac{2\sqrt{21}}{21}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡中的横线上．

13．已知 $(2x^3+\frac{1}{x})^n$ 的展开式的第 7 项为常数项，则正整数 n 的值为________．

14．若函数 $f(x)=e^{x-a+1}-x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围为________．

15．科拉茨是德国数学家，他在 1937 年提出了一个著名的猜想：任给一个正整数 n，如果 n 是偶数，就将它减半（即 $\frac{n}{2}$）；如果 n 是奇数，则将它乘 3 加 1（即 $3n+1$），不断重复这样的运算，经过有限步后，一定可以得到 1．这是一个很有趣的猜想，但目前还没有证明或否定．如果对正整数 n（首项）按照上述规则施行变换后的第 8 项为 1(注：1 可以多次出现)，则满足条件的 n 的所有不同值的和为________．

16．在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F， A， B 是其准线上的两个动点，且 $FA\perp FB$，线段 FA， FB 分别与抛物线 C 交于 P， Q 两点．记 $\triangle PQF$ 的面积为 S_1， $\triangle ABF$ 的面积为 S_2． 当 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{9}$ 时，$|AB|=$________．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均不为 0，其前 n 项和 S_n 满足 $a_na_{n+1}=4S_n-1$， $n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_1=1$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n ．

18．（12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A， B， C 所对的边分别为 a， b， c，面积为 S，已知 $6S=b(a+c)$．

（1）若 $\sin A=\dfrac{2}{3}$，求 $\cos B$；

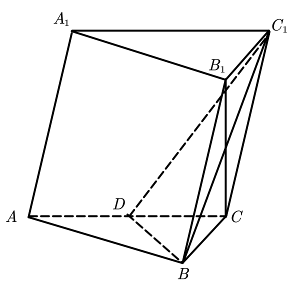
（2）若 $b=3$， $B=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S．

19．（12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $B_1C\perp$ 平面 ABC，点 D 为棱 AC 的中点， $DA=DB=2$．

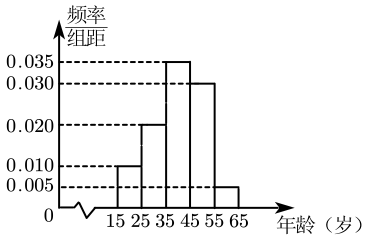
（1）求证： $AB\perp CC_1$；

（2）若 $BC=2$，求直线 BB_1 与平面 BDC_1 所成角的正弦的最大值．



20．（12 分）

某手机 APP 公司对喜欢使用该 APP 的用户年龄情况进行调查，随机抽取了 100 名喜欢使用该 APP 的用户，年龄均在$[15,65]$周岁内，按照年龄分组得到如下所示的样本频率分布直方图：



（1）根据频率分布直方图，估计使用该视频 APP 用户的平均年龄的第85% 分位数（小数点后保留 2 位）；

（2）若所有用户年龄 X 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 为样本平均数的估计值，$\sigma\approx 10.5$，试估计喜欢使用该 APP 且年龄大于 61 周岁的人数占所有喜欢使用该 APP 的比例；

（3）用样本的频率估计概率，从所有喜欢使用该 APP 的用户中随机抽取 8 名用户，用 $P(X=k)$ 表示这 8 名用户中恰有 k 名用户的年龄在区间$[25,35)$岁的概率，求 $P(X=k)$ 取最大值时对应的 k 值.

附：若随机变量 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$，

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$.

21．（12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 $l:x=1$，l 与 x 轴交于点 H，l 与双曲线 C 的一条渐近线交于点 T，且 $\overrightarrow{HF_1}+3\overrightarrow{HF_2}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}=-2$.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）设过点 H 与 x 轴不重合的直线交双曲线 C 于 A，B 两点，直线 AF_2，BF_2 分别交 l 于点 M，N，求证：$|HM|=|HN|$.

22．（12 分）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+b\sin x$，$x\in(-\pi,+\infty)$.

（1）若函数 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 2.

①求实数 b 的值；

②求证：$f(x)$ 存在唯一极小值点 x_0 且 $f\left(x_0\right)>-1$.

（2）当 $b>0$ 时，若 $f(x)$ 在 $x\in(-\pi,+\infty)$ 上存在零点，求实数 b 的取值范围.