

郑州外国语学校2021秋高三开学摸底测试

数学试题(文)

注意事项:

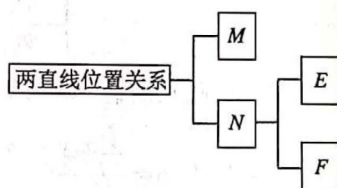
1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 考生做题时将答案答在答题卡的指定位置上, 在本试卷上答题无效. 考试时间 120 分钟, 试卷满分 150 分.
2. 答题前, 考生务必先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂, 非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性(签字)笔或碳素笔书写, 字体工整, 笔迹清楚.
4. 请按照题号在各题的答题区域(黑色线框)内作答, 超出答题区域书写的答案无效.
5. 保持卷面清洁, 不折叠、不破损.

第 I 卷 选择题(共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知 $\omega = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, i 为虚数单位, 则 $\omega^2 - \omega + 1$ 的值为
- A. -1 B. 0 C. 1 D. i

2. 把平面内两条直线的位置关系填入结构图中的 M, N, E, F 中, 顺序较为恰当的是



- ①平行; ②垂直; ③相交; ④斜交.
- A. ①②③④ B. ①④②③
C. ①③②④ D. ②①④③

3. 在二维空间中, 圆的一维测度(周长) $l = 2\pi r$, 二维测度(面积) $S = \pi r^2$; 在三维空间中, 球的二维测度(表面积) $S = 4\pi r^2$, 三维测度(体积) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. 应用合情推理, 若在四维空间中, “特级球”的三维测度 $V = 12\pi r^3$, 则其四维测度 W 为

- A. $4\pi r^4$ B. $3\pi r^4$ C. $2\pi r^4$ D. πr^4

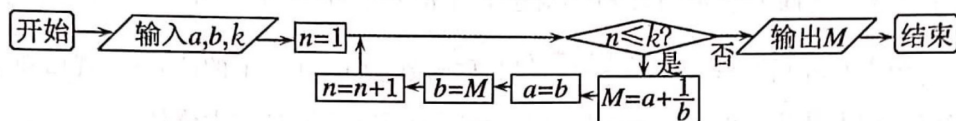
4. 已知某产品的销售额 y (单位: 万元)与广告费用 x (单位: 万元)之间的关系如下表:

x (单位: 万元)	0	1	2	3	4
y (单位: 万元)	10	15	m	30	35

若根据表中的数据用最小二乘法求得 y 与 x 的回归直线方程为 $y = 6.5x + 9$, 则下列说法中错误的是

- A. 当广告费用为 10 万元时, 销售额一定为 74 万元
 - B. 该回归直线过点(2, 22)
 - C. 产品的销售额与广告费用成正相关
 - D. m 的值是 20
5. 极坐标方程 $(\rho - 1)(\theta - \pi) = 0 (\rho \geq 0)$ 表示的图形是
- A. 两个圆
 - B. 两条直线
 - C. 一个圆和一条射线
 - D. 一条直线和一条射线

6. 执行下面的程序框图,若输入的 a, b, k 分别为 1, 2, 3, 则输出的 $M =$



- A. $\frac{20}{3}$ B. $\frac{7}{2}$ C. $\frac{16}{5}$ D. $\frac{15}{8}$

7. 若复数 z 满足 $z(1-i) = 2i$, 则下列说法正确的是

- A. z 的虚部为 i B. z 的共轭复数为 $\bar{z} = -1 + i$
C. $|z| = 2$ D. z 对应的点在第二象限

8. 在极坐标系中, 两条曲线 $C_1: \rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 1, C_2: \rho = \sqrt{2}$ 的交点为 A, B , 则 $|AB| =$

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 1

9. 若两个正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$, 且不等式 $x + \frac{y}{4} < m^2 - 3m$ 有解, 则实数 m 的取值范围是

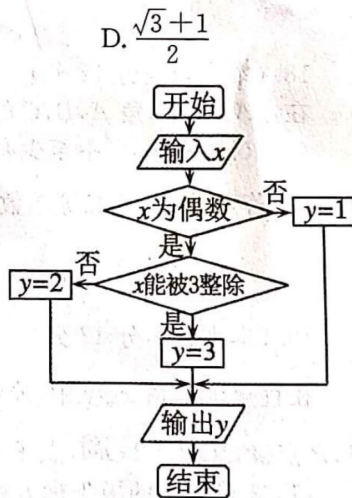
- A. $(-1, 4)$ B. $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$
C. $(-4, 1)$ D. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

10. 点 P 所在轨迹的极坐标方程为 $\rho = 2\cos\theta$, 点 Q 所在轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x=3t \\ y=\sqrt{3}+\sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $|PQ|$ 的最小值是

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

11. 某算法的程序框图如图所示, 其中输入的变量 x 在 1, 2, 3, ..., 24 这 24 个整数中等可能随机产生. 则按程序框图运行时输出 y 的值为 3 的概率为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$
C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$



12. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 记 $f_1(x) = f'(x), f_2(x) = f_1'(x), \dots, f_{n+1}(x) = f_n'(x) (n \in \mathbb{N}^*)$. 若 $f(x) = x \sin x$, 则 $f_{2019}(x) + f_{2021}(x) =$

- A. $-2\cos x$ B. $-2\sin x$
C. $2\cos x$ D. $2\sin x$

第 II 卷 非选择题(共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 复数 $z = \frac{1+i}{1+3i}$, 复数 \bar{z} 是 z 的共轭复数, 则 $z \cdot \bar{z} =$ _____.

14. 已知直线的参数方程为 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \end{cases}$ (t 为参数), 则该直线被圆 $x^2 + y^2 = 9$ 截得的弦长为 _____.

15. 若定义在区间 D 上的函数 $f(x)$ 对于 D 上的 n 个值 x_1, x_2, \dots, x_n , 总满足 $\frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$, 称函数 $f(x)$ 为 D 上的凸函数. 现已知 $f(x) = \sin x$ 在 $(0, \pi)$ 上是凸函数, 则在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A + \sin B + \sin C$ 的最大值是 _____.

16. 瑞士数学家、物理学家欧拉发现任一凸多面体(即多面体内任意两点的连线都被完全包含在该多面体中, 直观上讲是指没有凹陷或孔洞的多面体)的顶点数 V 、棱数 E 及面数 F 满足等式 $V - E + F = 2$, 这个等式称为欧拉多面体公式, 被认为是数学领域最漂亮、简洁的公式之一. 现实生活中存在很多奇妙的几何体, 现代足球的外观即取自一种不完全正多面体, 共有 32 个面, 是由 m 块白色正六边形面料和 $32 - m$ 块黑色正五边形面料构成的. 则 m 的值为 _____.



三、解答题(本大题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

(1) 在① $z + \bar{z} = -8$, ② z 为纯虚数, ③ z 为非零实数, 这三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解决该问题.

已知复数 $z = (m^2 - 2m - 3) + (m^2 - 3m - 4)i$, (i 为虚数单位), \bar{z} 为 z 的共轭复数, 若 _____, 求实数 m 的值; (注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个条件给分)

(2) 若 $\omega = 1 - i$ 是关于 x 的实系数一元二次方程: $x^2 + ax + b = 0$ 的一个根, 求 a, b 的值及方程的另一个根.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

(1) 求证: A, B, C 中至少有一个角大于或等于 60° ;

(2) 若角 A, B, C 成等差数列, 证明: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$.

19. (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2 + 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), M 为 C_1 上的动点, P 点满足 $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OM}$, 点 P 的轨迹为曲线 C_2 .

(1) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(2) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 射线 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A , 与 C_2 的异于极点的交点为 B , 求 $|AB|$.

20. (本小题满分 12 分)

(1) 已知 a, b, x 均为正数, 且 $a > b$, 求证: $1 < \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$;

(2) 根据生活常识“淡糖水再加糖会更甜”, 请给出类似第(1)小题的命题, 并予以证明;

数学(文) 第 3 页(共 4 页)

(3)证明: $\triangle ABC$ 中, $\frac{\sin A}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C + \sin A} + \frac{\sin C}{\sin A + \sin B} < 2$. (可直接应用第(1)(2)小题的结论)

21. (本小题满分 12 分)

遵守交通规则,人人有责.“礼让行人”是我国《道路交通安全法》的明文规定,也是全国文明城市测评中的重要内容.《道路交通安全法》第 47 条明确规定:“机动车行经人行横道时,应当减速行驶,遇行人正在通过人行横道,应当停车让行.机动车行经没有交通信号的道路时,遇行人横过道路,应当避让,否则扣 3 分罚 200 元”.下表是 2021 年 1 至 4 月份我市某主干路口监控设备抓拍到的驾驶员不“礼让行人”行为统计数据:

月 份	1	2	3	4
违章驾驶员人数	125	105	100	90

(1)请利用所给数据求违章人数 y 与月份 x 之间的回归直线方程 $y = bx + a$,并预测该路口 2021 年 5 月不“礼让行人”驾驶员的大约人数(四舍五入);

(2)交警从这 4 个月内通过该路口的驾驶员中随机抽查 50 人,调查驾驶员不“礼让行人”行为与驾龄的关系,得到下表:

	不礼让行人	礼让行人
驾龄不超过 2 年	10	20
驾龄 2 年以上	8	12

能否据此判断有 90% 的把握认为“礼让行人”行为与驾龄有关?

$$\text{参考公式: } b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, a = \bar{y} - b \bar{x}.$$

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a + b + c + d.$$

22. (本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数).以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\left[k - 1 + 3\sin^2 \left(\frac{k\pi}{4} + \theta \right) \right] \rho^4 = 4$.

(1)当 $k=1$ 时,求 C_1 和 C_2 的直角坐标方程;

(2)当 $k=2$ 时, C_1 与 C_2 交于 A, B 两点,设点 P 的直角坐标为 $(0, 1)$,求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》