2022～2023下学年高三年级TOP二十名校猜题大联考(二)·数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. D　由$\frac{z-3}{1+\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$,得$z=(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+3=6+\mathrm{i}$,则$|z|=\sqrt{6^2+1^2}=\sqrt{37}$.故选D.

2. A　根据已知得$M=\left\{x\middle|x=\frac{3k+1}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$,$N=\left\{x\middle|x=\frac{k+3}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$,所以$M\subseteq N$.故选A.

3. D　$a=\frac{(-1)^3}{3}-2=-\frac{7}{3}$,故切点为$\left(-1,-\frac{7}{3}\right)$,$y'=x^2$,$y'|_{x=-1}=1$,即切线的斜率为1,所以切线方程为$y-\left(-\frac{7}{3}\right)=x+1$,即$3x-3y-4=0$.故选D.

4. C　由$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,可知$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,故$\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$.设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,即$\cos\theta=\frac{1}{2}$,又$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以$\theta=\frac{\pi}{3}$.故选C.

5. B　$f(-x)=\ln(\sqrt{(-x)^2+a}+x)=\ln(\sqrt{x^2+a}+x)$,因为$f(x)$为奇函数,所以$f(x)+f(-x)=0$,即$\ln(\sqrt{x^2+a}-x)+\ln(\sqrt{x^2+a}+x)=\ln[(\sqrt{x^2+a}-x)(\sqrt{x^2+a}+x)]=\ln[(x^2+a)-x^2]=\ln a=0$,所以$a=1$,所以$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,所以$f(0)+f(1)=\ln(\sqrt{2}-1)$.故选B.

6. A　$\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^{10}$的通项为$T_{r+1}=C_{10}^r(x^{-1})^{10-r}(-x^{\frac{1}{2}})^r=C_{10}^r(-1)^r x^{\frac{3}{2}r-10}$,令$\frac{3}{2}r-10=-7$,解得$r=2$,故$x^{-7}$的系数等于$C_{10}^2(-1)^2=45$.故选A.

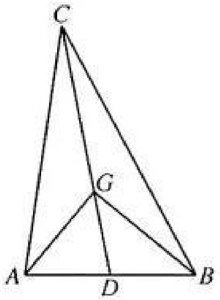
7. B　$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=1-2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{5}{8}$.故选B.

8. D　执行程序框图:$n=20,m=100-n,S=3n+\frac{m}{3}$,$n=20,m=80,S=\frac{260}{3}\neq100$,继续执行;$n=21,m=79,S=\frac{268}{3}\neq100$,继续执行;$n=22,m=78,S=92\neq100$,继续执行;$n=23,m=77,S=\frac{284}{3}\neq100$,继续执行;$n=24,m=76,S=\frac{292}{3}\neq100$,继续执行;$n=25,m=75,S=100$,退出循环,输出$n=25,m=75$.输出的$m$的值为小僧的人数,输出的$n$的值为大僧的人数.故选D.

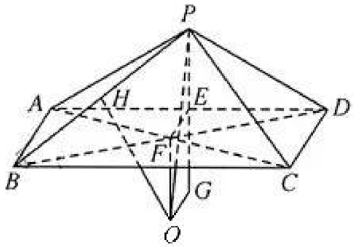
9. C　因为PQ是$\angle F_1PF_2$的平分线,故点Q到直线PF_1,PF_2的距离相等,则$\frac{S_{\triangle QPF_1}}{S_{\triangle QPF_2}}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|QF_1|}{|QF_2|}=\frac{m+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-m}$,又因为$|PF_1|+|PF_2|=4$,所以$\frac{4-|PF_2|}{|PF_2|}=\frac{\sqrt{3}+m}{\sqrt{3}-m}$,解得$|PF_2|=\frac{2(\sqrt{3}-m)}{\sqrt{3}}$,所以$2-\sqrt{3}<\frac{2(\sqrt{3}-m)}{\sqrt{3}}<2+\sqrt{3}$,解得$-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$.故选C.

10. A　构造函数$f(x)=\ln(x+1)-x$,$x\in(-1,+\infty)$,则$f'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$,当$x\in(-1,0)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-1,0)$上单调递增;当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$f(0.1)<f(0)=0$,即$\ln(0.1+1)-0.1<0$,得$\ln 1.1<0.1$,即$a<b$;构造函数$g(x)=x-\mathrm{e}^{x-1}$,$x\in\mathbf{R}$,则$g'(x)=1-\mathrm{e}^{x-1}$,当$x\in(-\infty,1)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,$b-c=g(0.1)<g(1)=0$,$b<c$,所以$a<b<c$.故选A.

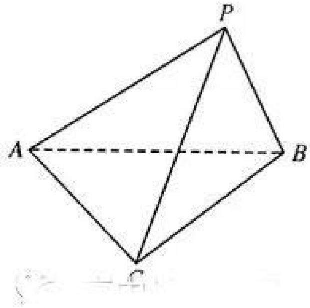
11. C 连接 CG 并延长交 AB 于点 D，则 D 为 AB 的中点，因为 $AG\perp BG$，则 $GD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}c$，由重心的性质可得 $\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GD}$，则 $CD=\frac{3}{2}c$，因为 $2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$，所以 $4\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，所以 $b^2+a^2+2ab\cos C=9c^2=9a^2+9b^2-18ab\cos C$，所以 $\cos C=\frac{2}{5}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$，由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-2\times\frac{2}{5}(a^2+b^2)=\frac{1}{5}(a^2+b^2)$，所以 $a^2+b^2=5c^2$，因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $\begin{cases}\cos A>0,\\ \cos B>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b^2+c^2>a^2,\\ a^2+c^2>b^2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}5b^2+a^2+b^2>5a^2,\\ 5a^2+a^2+b^2>5b^2,\end{cases}$ 所以 $\frac{\sqrt6}{3}<\frac{b}{a}<\frac{\sqrt6}{2}$. 构造函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，易得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt6}{3},1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,\frac{\sqrt6}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $2\leqslant\frac{b}{a}+\frac{a}{b}<\frac{5\sqrt6}{6}$，故 $\cos C=\frac{2}{5}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\in\left[\frac{4}{5},\frac{\sqrt6}{3}\right)$. 故选 C.



12. D 如图，在矩形 $ABCD$ 中，连接对角线 AC，BD，记 $AC\cap BD=F$，则点 F 为矩形 $ABCD$ 的外接圆圆心，设 $PA=PD=a$，在 $\triangle PAD$ 中，由余弦定理得 $AD^2=PA^2+PD^2-2\cdot PA\cdot PD\cdot\cos\angle APD=a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=3a^2$，即 $AD=\sqrt3 a$，$\triangle PAD$ 的外接圆半径为 $\frac{AD}{2\sin\angle APD}=a$. 记 $\triangle PAD$ 的外接圆圆心为 G，则 $GP=a$，取 AD 的中点 E，连接 PE，EF，显然 $EF\parallel AB$，$EF=\frac{1}{2}AB=\sqrt{13}$，$PE\perp AD$，且 P，E，G 共线，因为 $AB\perp PD$，$AB\perp AD$，$AD\cap PD=D$，于是 $AB\perp$ 平面 PAD，即 $EF\perp$ 平面 PAD，$PE\subset$ 平面 PAD，有 $PE\perp EF$，而 $EF\cap AD=E$，EF，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，因此 $PE\perp$ 平面 $ABCD$. 过 G 作 $GO\perp$ 平面 PAD，使 $GO=EF$，连接 FO，于是 $GO\parallel EF$，则四边形 $EFOG$ 为矩形，有 $FO\parallel PG$，则 $FO\perp$ 平面 $ABCD$，根据球的性质，得点 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心，因为球 O 的体积为 $\frac{500\pi}{3}$，则 $\frac{4\pi}{3}\times PO^3=\frac{500\pi}{3}$，解得 $PO=5$，而 $AB=2\sqrt{13}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PGO$ 中，$PG=a=\sqrt{PO^2-GO^2}=2\sqrt3$，因此 $\triangle PAB$ 外接圆直径 $PB=\sqrt{AB^2+PA^2}=\sqrt{(2\sqrt{13})^2+(2\sqrt3)^2}=8$，取 PB 的中点 H，连接 OH，显然 H 为 $\triangle PAB$ 外接圆圆心，则 $OH\perp$ 平面 PAB，且 $OH=\sqrt{5^2-4^2}=3$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球上的点到平面 PAB 的距离的最大值为 8，即三棱锥 $M-PAB$ 的高的最大值为 8，而 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}PA\cdot AB=\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times2\sqrt3=2\sqrt{39}$，故三棱锥 $M-PAB$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}S_{\triangle PAB}\times8=\frac{1}{3}\times2\sqrt{39}\times8=\frac{16\sqrt{39}}{3}$. 故选 D.



13. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 或 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 或 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{27}{4}}=1$ 若选①②，因为实轴长为 4，所以 $a=2$，又焦距为 6，所以 $c=3$，则 $b=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt5$，故此时双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$；若选①③，因为 $e=\frac{c}{a}=2$，得 $c=2a$，又实轴长为 4，得 $a=2$，所以 $c=4$，则 $b=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt3$，故此时双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$；若选②③，因为 $e=\frac{c}{a}=2$，又焦距为 6，所以 $c=3$，所以 $a=\frac{3}{2}$，$b=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt3}{2}$，故此时双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{27}{4}}=1$. 来源：高三答案公众号



14. 4 由三视图可得该几何体为如图所示的三棱锥 $P-ABC$，其中棱锥的高为 2，$AB=4$，在 $\triangle ABC$ 中，AB 边上的高为 3，则 $PA=AC=BC=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$PB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$，$PC=\sqrt{1^2+3^2+2^2}=\sqrt{14}$，所以该几何体的最长棱长为 4.

15. 45　由题得圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=25$，设圆心 $M(2,-1)$，半径 $r=5$，$|OM|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$，若圆心 $M(2,-1)$ 到直线 AC，BD 的距离为 d_1,d_2，则 $d_1,d_2\in[0,\sqrt{5}]$ 且 $d_1^2+d_2^2=OM^2=5$，$|AC|=2\sqrt{25-d_1^2}$，$|BD|=2\sqrt{25-d_2^2}$. 而 $S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}|AC||BD|$，所以 $S_{四边形ABCD}=2\sqrt{625-25(d_1^2+d_2^2)+(d_1d_2)^2}=2\sqrt{500+(d_1d_2)^2}$，令 $t=d_2^2=5-d_1^2\in[0,5]$，则 $S_{四边形ABCD}=2\sqrt{500+5t-t^2}=2\sqrt{-\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{2\,025}{4}}$，当 $t=\frac{5}{2}$，即 $d_1=d_2=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 时，四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 45.

16. $4-\sqrt{3}$　由题意得 $y=a\sin x+b\cos x+c=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)+c$，其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，因为 $\left(\frac{11\pi}{6},1\right)$ 是图象的最低点，所以 $\begin{cases}\frac{11\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}),\\ -\sqrt{a^2+b^2}+c=1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\varphi=2k\pi-\frac{7\pi}{3}(k\in\mathbf{Z}),\\ \sqrt{a^2+b^2}=c-1,\end{cases}$ 所以 $y=(c-1)\sin\left(x+2k\pi-\frac{7\pi}{3}\right)+c=(c-1)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+c$. 横坐标缩为原来的 $\frac{3}{\pi}$ 得 $y=(c-1)\sin\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{3}\right)+c$，向左移动 1 个单位长度得 $f(x)=(c-1)\sin\frac{\pi}{3}x+c$，所以 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$. 由 $f(x)=3$ 的所有根从小到大依次相差 3 个单位可知 $y=f(x)$ 与 $y=3$ 的相邻交点间的距离相等，所以 $y=3$ 过曲线 $y=f(x)$ 的最高点或最低点，或经过 $y=f(x)$ 所有的对称中心. ①当 $y=3$ 过曲线 $y=f(x)$ 的最高点或最低点时，每两个根之间相差一个周期，即相差 6，不合题意；②当 $y=3$ 过曲线 $y=f(x)$ 所有的对称中心时，则 $\sin\frac{\pi}{3}x=0$，所以 $c=3$，所以 $y=(c-1)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+c=\sin x-\sqrt{3}\cos x+3$，$a=1$，$b=-\sqrt{3}$，所以 $a+b+c=4-\sqrt{3}$.

17. 解：(1) 列联表如下：

	将跑步作为主要锻炼方式	不是将跑步作为主要锻炼方式	合计
男性	20	20	40
女性	10	30	40
合计	30	50	80

…………3 分

$K^2=\frac{80\times(20\times30-20\times10)^2}{40\times40\times30\times50}\approx5.333<6.635$. …………5 分

所以没有 99% 的把握认为是否将跑步作为主要锻炼方式与性别有关. …………6 分

(2) 抽取的 5 人中，男性有 $\frac{20}{50}\times5=2$ 人，女性有 $\frac{30}{50}\times5=3$ 人. …………8 分

X 的可能值有 0,1,2,

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，

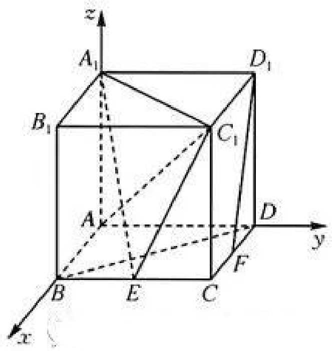
X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

…………11 分

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. …………12 分

18. (1) 证明：以 A 为原点，AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，不妨设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$C_1(2,2,2)$，$D_1(0,2,2)$.
…………1 分



因为 E 为棱 BC 的中点，F 为棱 CD 的中点，

所以 $E(2,1,0)$，$F(1,2,0)$， …………2 分

所以 $\overrightarrow{D_1F}=(1,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{A_1E}=(2,1,-2)$. …………3 分

设平面 A_1EC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则

由 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}=2x_1+2y_1=0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{A_1E}=2x_1+y_1-2z_1=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y_1=-x_1, \\ z_1=\dfrac{x_1}{2}, \end{cases}$来源：高三答案公众号

令 $x_1=2$，则 $\boldsymbol{m}=(2,-2,1)$. ………………………………………………………… 5 分

因为 $\overrightarrow{D_1F} \cdot \boldsymbol{m}=2-2=0$,

所以 $\overrightarrow{D_1F} \perp \boldsymbol{m}$, ………………………………………………………………………… 7 分

因为 $D_1F \not\subset$ 平面 A_1EC_1,

所以 $D_1F /\!/$ 平面 A_1EC_1. ………………………………………………………………… 8 分

（注：本题利用几何法证明同样按步给分）

(2)解：由(1)得，$\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$, ……………………………………………………… 10 分

设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{AC_1}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AC_1}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{|(2,-2,1) \cdot (2,2,2)|}{3\times2\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3\times2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. ………………… 12 分

19. 解：(1)由 $2\sqrt{S_n}=a_n+1$，得 $S_n=\left(\dfrac{a_n+1}{2}\right)^2$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\left(\dfrac{a_1+1}{2}\right)^2$，解得 $a_1=1$. ……………… 1 分

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\dfrac{a_n+1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a_{n-1}+1}{2}\right)^2$,

化简得 $a_n-a_{n-1}=2$, …………………………………………………………………………… 3 分

∴数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_n=1+2(n-1)=2n-1$. ……………………………………………… 4 分

(2)由(1)可得：$b_n=\dfrac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\dfrac{1}{2n\times2(n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

∴数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{4(n+1)}$. ……… 7 分

∵ $T_{n+1}-T_n=\dfrac{n+1}{4(n+2)}-\dfrac{n}{4(n+1)}=\dfrac{1}{4(n+1)(n+2)}>0$,

∴ $\{T_n\}$ 单调递增，∴ $T_n\geqslant T_1=\dfrac{1}{8}$, ………………………………………………………… 9 分

∵ $T_n=\dfrac{n}{4(n+1)}<\dfrac{1}{4}$,

∴ $\dfrac{1}{8}\leqslant T_n<\dfrac{1}{4}$，若使得 $\dfrac{5m-2}{4}<T_n<5m$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，…………………………… 10 分

则 $\begin{cases} \dfrac{1}{4}\leqslant5m, \\ \dfrac{5m-2}{4}<\dfrac{1}{8}, \end{cases}$ 解得 $\dfrac{1}{20}\leqslant m<\dfrac{1}{2}$.

∴实数 m 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{20},\dfrac{1}{2}\right)$. ……………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为抛物线 $\Gamma: x^2=2py$ 上一点到焦点 F 的距离比它到直线 $y=-4$ 的距离小于 3,

所以抛物线 $\Gamma: x^2=2py$ 上一点到焦点 F 的距离等于它到直线 $y=-1$ 的距离，……………… 2 分

所以 $\dfrac{p}{2}=1$，解得 $p=2$, …………………………………………………………………… 3 分

故抛物线 Γ 的方程是 $x^2=4y$，抛物线的准线方程为 $y=-1$. ………………………………… 4 分

(2)由题意得 $F(0,1)$，且 l 斜率一定存在，设 $l: y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ x^2=4y \end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2-4kx-4=0$，$\Delta=16k^2+16>0$,

则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$. ………………………………………………………………… 5 分

设 AB 中点为 M，则 $\tan\angle ACB=\tan2\angle ACM=\dfrac{2\tan\angle ACM}{1-\tan^2\angle ACM}=\dfrac{2\times\dfrac{AM}{CM}}{1-\dfrac{AM^2}{CM^2}}=\dfrac{4}{3}$, ……………… 6 分

解得 $CM=2AM$，即 $CM=AB$.

当 $k=0$ 时，易知 $CM=2$，$|AB|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4$，不符合题意；…………… 8 分

当 $k\neq0$ 时，设 $C(x_3,y_3)$，$M(x_4,y_4)$.

因为 CM 垂直平分 AB，所以 CM 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$,

易知$|CM|=\sqrt{1+k^2}|y_3-y_4|$，因此有$\sqrt{1+k^2}|y_3-y_4|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$. ……………………………… 9 分

因为 M 为 AB 的中点，所以 $y_4=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{k(x_1+x_2)+2}{2}=2k^2+1$，……………………………………………… 10 分

由题意，$y_3=-1$，即$|x_1-x_2|=2k^2+2$，$\sqrt{16k^2+16}=2k^2+2$，

两边平方整理可得 $k^4-2k^2-3=0$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$，……………………………………………………………… 11 分

故存在直线 l 使得 $\tan\angle ACB=\frac{4}{3}$，且直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x+1$ 或 $y=-\sqrt{3}x+1$. ………………………… 12 分

1. 解：(1)$f'(x)=\frac{x^{a-1}e^{2x}(2x-a)}{x^{2a}}$，结合 $x>0$，$a\in\mathbf{R}$，………………………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，此时不存在极值；………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，若 $0<x<\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)<0$；若 $x>\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)>0$，来源：高三答案公众号

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增，

此时 $x=\frac{a}{2}$ 为函数的极小值点，此时存在极值，

故实数 a 的取值范围为$(0,+\infty)$. ……………………………………………………………………………………… 3 分

(2)易得 $g(x)=a(x^2-1)\ln x-(x-1)^2(a\neq 0)$，

(ⅰ)$g(x)=a(x^2-1)\ln x-(x-1)^2=(x^2-1)\left(a\ln x-\frac{x-1}{x+1}\right)$，

设 $r(x)=a\ln x-\frac{x-1}{x+1}$，因为 $g(1)=0$，$r(1)=0$，则 $r(x)$除 1 外还有两个零点. ……………………………… 4 分

$r'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+(2a-2)x+a}{x(x+1)^2}$，令 $h(x)=ax^2+(2a-2)x+a(x>0)$，

当 $a<0$ 时，$h(x)<0$ 在$(0,+\infty)$恒成立，则 $r'(x)<0$，

所以 $r(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，不满足，舍去；

当 $a>0$ 时，$r(x)$除 1 外还有两个零点，则 $r(x)$不单调，

所以 $h(x)$存在两个零点，所以 $\Delta=(2a-2)^2-4a^2>0$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$. ………………………………………… 5 分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，设 $h(x)$的两个零点分别为 $m,n(m<n)$，

则 $m+n=\frac{2}{a}-2>0$，$mn=1$，所以 $0<m<1<n$.

当 $x\in(0,m)$时，$h(x)>0$，$r'(x)>0$，则 $r(x)$单调递增；

当 $x\in(m,n)$时，$h(x)<0$，$r'(x)<0$，则 $r(x)$单调递减；

当 $x\in(n,+\infty)$时，$h(x)>0$，$r'(x)>0$，则 $r(x)$单调递增，

又 $r(1)=0$，所以 $r(m)>0$，$r(n)<0$，…………………………………………………………………………………… 6 分

而 $r(e^{-\frac{1}{a}})=-1-\frac{e^{-\frac{1}{a}}-1}{e^{-\frac{1}{a}}+1}=-\frac{2e^{-\frac{1}{a}}}{e^{-\frac{1}{a}}+1}<0$，且 $e^{-\frac{1}{a}}<1$，

$r(e^{\frac{1}{a}})=1-\frac{e^{\frac{1}{a}}-1}{e^{\frac{1}{a}}+1}=\frac{2}{e^{\frac{1}{a}}+1}>0$，且 $e^{\frac{1}{a}}>1$，所以存在 $x_1\in(e^{-\frac{1}{a}},m)$，$x_3\in(n,e^{\frac{1}{a}})$，

使得 $r(x_1)=r(x_3)=0$，

即 $g(x)=a(x^2-1)\ln x-(x-1)^2(a\neq 0)$有 3 个零点 x_1，$x_2=1$，x_3.

综上，实数 a 的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$. ………………………………………………………………………… 8 分

(ⅱ)证明：结合(ⅰ)因为 $r\left(\frac{1}{x}\right)=-a\ln x-\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}=-a\ln x-\frac{1-x}{1+x}=-a\ln x+\frac{x-1}{x+1}=-r(x)$，

若 $r(x)=0$，则 $r\left(\frac{1}{x}\right)=0$，所以 $x_1=\frac{1}{x_3}$. ……………………………………………………………………… 9 分

当 $x>1$ 时，先证明不等式 $\ln x>\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ 恒成立，

设 $\varphi(x)=\ln x-\frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{12(x^2+x+1)}{(x^2+4x+1)^2}=\frac{(x-1)}{x(x^2+4x+1)^2}>0$，

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，于是 $\varphi(x)>\varphi(1)=0$，

即当 $x>1$ 时，不等式 $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ 恒成立.

由 $r(x_3)=0$，可得 $\dfrac{x_3-1}{x_3+1}=a\ln x_3>\dfrac{3a(x_3^2-1)}{x_3^2+4x_3+1}$，…………………………………… 10 分

因为 $x_3>1$，所以 $\dfrac{1}{x_3+1}>\dfrac{3a(x_3+1)}{x_3^2+4x_3+1}$，

即 $x_3^2+4x_3+1>3a(x_3+1)^2$，两边同除以 x_3，

得 $x_3+4+\dfrac{1}{x_3}>3a\left(x_3+2+\dfrac{1}{x_3}\right)$，即 $x_1+x_3+4>3a(x_1+x_3+2)$，

所以 $(3a-1)(x_1+x_3+2)<2$. …………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $\begin{cases}x=t,\\y=t\end{cases}$ 得 $x=y$，

故直线 l 的普通方程是 $x-y=0$；…………………………………… 2 分

由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，

代入公式 $\begin{cases}\rho\cos\theta=x,\\\rho\sin\theta=y,\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=2x$，

故曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2+y^2-2x=0$. …………………………………… 4 分

(2)设 $N(\rho,\theta)$，$0\leqslant\theta<2\pi$，

则 $\triangle MON$ 的面积为 $S_{\triangle MON}=\dfrac{1}{2}|OM||ON|\sin\angle MON=\dfrac{1}{2}\times\left|6\rho\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\right|$

$=\left|6\cos\theta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)\right|=\left|6\cos\theta\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\theta\right)\right|=|3\sqrt{3}\cos^2\theta-3\cos\theta\sin\theta|$

$=\left|\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(\cos 2\theta+1)-\dfrac{3}{2}\sin 2\theta\right|=\left|3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right|=\left|3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right|$，……… 7 分

因为 $0\leqslant\theta<2\pi$，故 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{25\pi}{6}$，所以 $-1\leqslant\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$.

则 $-3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant 3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant 3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. …………………………………… 9 分

故 $0\leqslant\left|3\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right|\leqslant 3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $(S_{\triangle MON})_{\max}=3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $\triangle MON$ 面积的最大值为 $3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. …………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=2|x|+|2x-m|=|2x|+|2x-m|$，

令 $|2x|=0$，解得 $x=0$；令 $|2x-m|=0$，解得 $x=\dfrac{m}{2}$，…………………………………… 1 分

因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $0+\dfrac{m}{2}=2\times1$，解得 $m=4$. …………………… 2 分

不等式 $f(x)\geqslant 6$ 即为 $|x|+|x-2|\geqslant 3$，…………………………………… 3 分

当 $x<0$ 时，不等式可化为 $(-x)+(2-x)\geqslant 3$，解得 $x\leqslant-\dfrac{1}{2}$；

当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，不等式可化为 $x+(2-x)=2\geqslant 3$，无解；

当 $x>2$ 时，不等式可化为 $x+(x-2)\geqslant 3$，解得 $x\geqslant\dfrac{5}{2}$. …………………………………… 5 分

综上，不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集是 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$. …………………………………… 6 分

(2)由(1)可得 $a+b=4$，

所以 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+1\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}+1=3$，…………………………………… 8 分

当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$，即 $a=2$，$b=2$ 时取等号，

故 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为 3. …………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。