中学生标准学术能力诊断性测试

文科数学科目参考答案

一．选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	C	A	A	D	A	D	C	A	B

二．填空题（每小题 5 分）

13.　6　　　　14.　2

15. $8\pi a^2$　　　　16. 6

三．解答题

17. 解：(1)$\because$　$b\cos A-a\sin B=0$

由正弦定理得：$\sin B\cos A-\sin A\sin B=0$　..................2 分

又$\because 0<B<\pi$　$\therefore \sin B\neq 0$，$\cos A-\sin A=0$　..................3 分

$\therefore \tan A=1$　..................4 分

$\because 0<A<\pi$

$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$　..................6 分

(2)$\because b=\sqrt{2}$，$A=\dfrac{\pi}{4}$，$S_{\Delta ABC}=1$

$\therefore \dfrac{1}{2}bc\sin A=1$　得 $c=2$　..................8 分

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2$　..................10 分

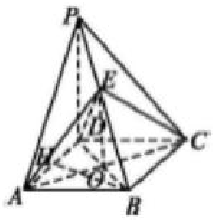
得 $a=\sqrt{2}$　..................12 分

18.解：(1)$\because PD\perp$平面 $ABCD$,$AC\subset$平面 $ABCD$,$\therefore AC\perp PD$.　..................1 分

$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore AC\perp BD$.　..................2 分

又$\because PD\cap BD=D$,$\therefore AC\perp$平面 PBD.　..................4 分

而 $AC\subset$平面 EAC,$\therefore$平面 $EAC\perp$平面 PBD.　..................5 分



(2) 连接 OE,取 AD 的中点 H,连接 BH,　..................6 分

$\because PD/\!/$平面 EAC,平面 $EAC\cap$平面 $PBD=OE$, $PD\subset$ 平面 PBD

$\therefore PD/\!/OE$.　..................8 分

∵O 是 BD 的中点,∴E 是 PB 的中点. ………………8 分

∵四边形 $ABCD$ 是菱形,$\angle BAD=60°$,∴$BH\perp AD$. ………………9 分

又 $BH\perp PD$,$AD\cap PD=D$,∴$BH\perp$ 平面 PAD,且 $BH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}a$,

故 $V_{P-EAD}=V_{E-PAD}=\frac{1}{2}V_{B-PAD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times S_{\triangle PAD}\times BH=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2(1-a^2)$. ………………10 分

由基本不等式得 $V_{P-EAD}=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2(1-a^2)\le\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{a^2+1-a^2}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{12}$,

当且仅当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，即最大体积为$\frac{\sqrt{3}}{12}$. ………………12 分

19. 解：(1)依题意,女士应抽取 110 名,男士应抽取 90 名,故 $x=10$,$y=15$. ………2 分

消费金额在[800,1 000](单位:元)的网购者共有 15 名,从中选出 2 名共有 105 种选法,若 2 名网购者都是男士,共有 10 种选法,所以选出的 2 名网购者都是男士的概率为$\frac{10}{105}=\frac{2}{21}$……5 分

(2)列联表如下:

	女士	男士	总计
网购达人	40	20	60
非网购达人	70	70	140
总计	110	90	200

………………8 分

计算 $K^2=\frac{200\times(40\times70-20\times70)^2}{110\times90\times60\times140}\approx4.714$. ………………10 分

又 $4.714>3.841$,故能在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下认为“是否为'网购达人'与性别有关”. ………………12 分

20. 解：(1) 设$P(x_0,y_0)$，代入椭圆的方程有：$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，

整理得：$y_0^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$， ………2 分

又 $k_1=\frac{y_0}{x_0+a}$，$k_2=\frac{y_0}{x_0-a}$，所以$k_1k_2=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{1}{2}$， ………3 分

联立两个方程有$k_1k_2=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$，解得：$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………5 分

(2) 由 (1) 知$a^2=2b^2$，又$b=1$，所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$ ………7 分

设直线l 的方程为：$x=my-1$，代入椭圆的方程有：$(m^2+2)y^2-2my-1=0$，

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由韦达定理：$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$，……….9 分

所以

$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|OD||y_1-y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{8m^2+8}}{m^2+2}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$，   …10 分

令$\sqrt{m^2+1}=t(t\geq 1)$，则有$m^2=t^2-1$，

代入上式有$S_{\triangle OMN}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=\frac{\sqrt{2}t}{t^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{t+\frac{1}{t}}\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$，   ……….11 分

当且仅当$t=1$，即$m=0$时等号成立，

所以△OMN 的面积的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$． ……….12 分

21. 解：(1) $\varphi'(x)=\frac{1}{x}+a-\frac{a-1}{x^2}=\frac{ax^2+x-(a-1)}{x^2}$……….1 分

$=\frac{[ax-(a-1)](x+1)}{x^2}$ $(x>0)$ ………….2 分

①当 a=0 时，$\varphi'(x)>0$ 恒成立，递增区间为$(0,+\infty)$

②当$a>1$时，由$\varphi'(x)>0$，解得$x>\frac{a-1}{a}$； ………….3 分

③当$a=1$时，由$\varphi'(x)>0$，解得$x>0$；

④当$0<a<1$时，由$\varphi'(x)>0$，解得$x>0$； ………….4 分

⑤当 a<0 时，由$\varphi'(x)>0$，解得$x<\frac{a-1}{a}$，又因为 x>0,所以$0<x<\frac{a-1}{a}$；

综上所述，

当$0\leq a\leq 1$时，$\varphi(x)$的单调增区间为$(0,+\infty)$；

$a>1$时，$\varphi(x)$的单调增区间为$\left(\frac{a-1}{a},+\infty\right)$.

当 a<0 时，$\varphi(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{a-1}{a}\right)$………….5 分

（2）解法一：

当$a=1$时，$f(x)=\ln x$，$g(x)=x-3$，$h(x)=(x-3)\ln x$，……6 分

所以$h'(x)=\ln x+1-\frac{3}{x}$单调递增，………….7 分

$h'\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{3}{2}+1-2<0$，$h'(2)=\ln 2+1-\frac{3}{2}>0$，

所以存在唯一 $x_0\in\left(\frac{3}{2},2\right)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $\ln x_0+1-\frac{3}{x_0}=0$，……8 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h_{\min}(x)=h(x_0)=(x_0-3)\ln x_0$ …………9 分

$=(x_0-3)\left(\frac{3}{x_0}-1\right)=-\frac{(x_0-3)^2}{x_0}=6-\left(x_0+\frac{9}{x_0}\right)$，…………10 分

记函数 $r(x)=6-\left(x+\frac{9}{x}\right)$，则 $r(x)$ 在 $\left(\frac{3}{2},2\right)$ 上单调递增，

所以 $r\left(\frac{3}{2}\right)<h(x_0)<r(2)$，即 $h(x_0)\in\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，…………11 分

由 $2\lambda\geq h(x)_{\min}=h(x_0)$ 得 $2\lambda\geq h(x_0)_{\max}$，即 $2\lambda\geq-\frac{1}{2}$，且 λ 为整数，得 $\lambda\geq 0$，

所以存在整数 λ 满足题意，且 λ 的最小值为 0. …………12 分

（2）解法二：

当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x$，$g(x)=x-3$，$h(x)=(x-3)\ln x$，……6 分

所以 $h'(x)=\ln x+1-\frac{3}{x}$ 单调递增，…………7 分

$h'(1)=\ln 1+1-3<0$，$h'(2)=\ln 2+1-\frac{3}{2}>0$，

所以存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得 $h'(x_0)=0$，即 $\ln x_0+1-\frac{3}{x_0}=0$，……8 分

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h_{\min}(x)=h(x_0)=(x_0-3)\ln x_0$ …………9 分

$=(x_0-3)\left(\frac{3}{x_0}-1\right)=-\frac{(x_0-3)^2}{x_0}=6-\left(x_0+\frac{9}{x_0}\right)$，…………10 分

记函数 $r(x)=6-\left(x+\frac{9}{x}\right)$，则 $r(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

所以$r(1) < h(x_0) < r(2)$，即$h(x_0) \in (-4, -\frac{1}{2})$，............11 分

由$2\lambda \ge h(x)_{\min} = h(x_0)$得$2\lambda \ge h(x_0)_{\max}$，即$2\lambda \ge -\frac{1}{2}$，且$\lambda$为整数，得$\lambda \ge 0$，

所以存在整数λ满足题意，且λ的最小值为 0. ....12 分

22.解：

(1)由圆C的参数方程$\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2 + 2\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$为参数）知，圆$C$的圆心为$(0,2)$，

半径为2，圆C的普通方程为$x^2 + (y-2)^2 = 4$. ......4 分

（2）将$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$代入$x^2 + (y-2)^2 = 4$. 得圆$C$的极坐标方程为

$\rho = 4\sin\theta$. ...5 分

设$P(\rho_1, \theta_1)$，则由$\begin{cases} \rho = 4\sin\theta \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ 解得$\rho_1 = 2, \theta_1 = \frac{\pi}{6}$. ......7 分

设$Q(\rho_2, \theta_2)$，则由$\begin{cases} 2\rho\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 5\sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ 解得$\rho_1 = 5, \theta_1 = \frac{\pi}{6}$. ......9 分

所以$|PQ| = |\rho_1 - \rho_2| = 3$. ....10 分

23. 解：（1）$f(x) = |x-1| + |x-2| = \begin{cases} -2x+3 & (x \le 1) \\ 1 & (1 < x < 2) \\ 2x-3 & (x \ge 2) \end{cases}$ ....2 分

当$x \le 1$时，由$-2x+3 \ge 3$，得$x \le 0$

当$1 < x < 2$时，由$1 \ge 3$，得$x \in \varnothing$

当$x \ge 2$时，由$2x-3 \ge 3$，得$x \ge 3$ ....5 分

所以不等式$f(x) \ge 3$的解集为$\{x | x \le 0或x \ge 3\}$ ....6 分

（2）$\because |x-1| + |x-2| \ge |(x-1) - (x-2)| = 1$ ....8 分

$\therefore$依题意有$-a^2 + a + 7 \ge 1$，即$a^2 - a - 6 \le 0$ ....9 分

解得$-2 \le a \le 3$

故a的最大值为 3.........10 分