

绝密★启用并使用完毕前

山东省实验中学 2023 届高三第一次模拟考试

数学试题 2023.5

注意事项:

1. 答卷前, 先将自己的考生号等信息填写在试卷和答题纸上, 并在答题纸规定位置贴条形码。

2. 本试卷满分 150 分, 分为第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 第 I 卷为第 1 页至第 3 页, 第 II 卷为第 3 页至第 4 页。

3. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。

4. 非选择题的作答: 用 0.5mm 黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

第 I 卷 (共 60 分)

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 为虚数单位, 复数 z 满足 $|z - 2 - 3i| = 1$, 则复数 z 对应的点在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, 集合 $B = \{x | \log_3(x-1) < 1\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | 0 < x < 3\}$ B. $\{x | 1 < x < 3\}$ C. $\{x | 0 < x < 4\}$ D. $\{x | 1 < x < 4\}$

3. 若椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 则椭圆 C 的长轴长为

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 或 $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{6}$

4. 在高三某次模拟考试中, 甲、乙两个班级的数学成绩统计如下表:

班级	人数	平均分数	方差
甲	40	70	5
乙	60	80	8

则两个班所有学生的数学成绩的方差为

- A. 6.5 B. 13 C. 30.8 D. 31.8

5. 一袋里装有带编号的红色, 白色, 黑色, 蓝色四种不同颜色的球各两个, 从中随机选 4 个球, 已知有两个是同一颜色的球, 则另外两个球不是同一颜色的概率为

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{8}{15}$

6. 已知 $m + e^m = e$, $n + 5^n = e$, 则 $n \lg m$ 与 $m \lg n$ 的大小关系是

- A. $n \lg m < m \lg n$ B. $n \lg m > m \lg n$ C. $n \lg m = m \lg n$ D. 不确定

数学试题 第 1 页, 共 4 页

7. 已知 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 满足 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 0$ 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调, 则 ω 的最大值为

- A. $\frac{6}{17}$ B. $\frac{18}{17}$ C. $\frac{12}{7}$ D. $\frac{30}{17}$

8. 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足 $x_1^2 + y_1^2 = 2, x_2^2 + y_2^2 = 2, x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, 记 $z = |x_1 + y_1 - 2\sqrt{2}| + |x_2 + y_2 - 2\sqrt{2}|$, 则 z 的最大值为

- A. $2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{2}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列有关回归分析的结论中, 正确的有

- A. 若回归方程为 $\hat{y} = 6 - 2.5x$, 则变量 y 与 x 负相关
B. 运用最小二乘法求得的经验回归直线一定经过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y})
C. 若决定系数 R^2 的值越接近于 0, 则表示回归模型的拟合效果越好
D. 若散点图中所有点都在直线 $y = 0.92x - 4.21$ 上, 则相关系数 $r = 0.92$

10. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 前 n 项和为 S_n , $a_1 = 10$, 公差 $d = -2$, 则

- A. $a_n = -2n + 12$
B. $S_4 = S_7$
C. 当 $n = 5$ 或 6 时, S_n 取得最大值为 30
D. 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ 与数列 $\{3m + 10\} (m \in \mathbb{N}^*)$ 共有 671 项互为相反数

11. 已知 AC 为圆锥 SO 底面圆 O 的直径 (S 为顶点, O 为圆心), 点 B 为圆 O 上异于 A, C 的动点, $SO = 1, OC = \sqrt{3}$, 平面 α 和直线 SO 所成的角为 θ , 该圆锥侧面与平面 α 的交线为曲线 C , 则

- A. 过该圆锥顶点 S 的平面截此圆锥所得截面面积的最大值为 2
B. $\angle SAB$ 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$
C. 若 $AB = BC, E$ 为线段 AB 上的动点, 则 $SE + CE$ 的最小值为 $\sqrt{10 + 2\sqrt{15}}$
D. 若 $\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则曲线 C 必为双曲线的一部分

12. 对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$, 若存在区间 $[a,b] \subseteq D$ 使得 $f(x)$ 同时满足: ① $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调函数; ② 当 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$ 时, $f(x)$ 的值域也为 $[a,b]$, 则称区间 $[a,b]$ 为该函数的一个“和谐区间”, 则
- A. 函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x$ 有 3 个“和谐区间”
- B. 函数 $f(x)=x^2+\frac{1}{4}$, $x \in [0,+\infty)$ 存在“和谐区间”
- C. 若定义在 $(3,12)$ 上的函数 $f(x)=\frac{2tx-4t-9}{x-2}$ 有“和谐区间”, 则 t 的取值范围为 $(4,6)$
- D. 若函数 $f(x)=m-\sqrt{x+3}$ 在定义域内有“和谐区间”, 则 m 的取值范围为 $\left(-\frac{9}{4}, -2\right]$

第 II 卷 (共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5$, 则 $a_1 + a_3 + a_5$ 的值为_____.
14. 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$ 在区间 $(a-4, a)$ 上存在最小值, 则整数 a 的取值可以是_____.
15. 若平面向量 a, b, c 满足 $|a|=1, b \cdot c=0, a \cdot b=1, a \cdot c=-1$, 则 $|b+c|$ 的最小值为_____.
16. 已知三棱锥 $P-ABC$, 平面 $PBC \perp$ 平面 ABC , Q 为 BC 中点, $PB=PC=AB=BC=AC=2$, 则过点 Q 的平面截该三棱锥外接球所得截面面积的取值范围为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=1, S_{n+1}^2 - S_n^2 = 8n$.

(1) 求 S_n ;

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 的每相邻两项 a_k, a_{k+1} 之间依次插入 a_1, a_2, \dots, a_k , 得到数列 $\{b_n\}$:

$a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, 求 $\{b_n\}$ 的前 20 项和 T_{20} .

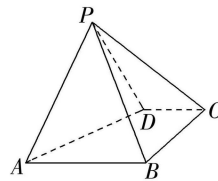
18. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA=PC, AB=BC$.

(1) 求证: $PB \perp AC$;

(2) 若平面 $PCD \perp$ 平面 $ABCD, AB \parallel CD$, 且 $AB=2CD=2$,

$\angle ABC=90^\circ$, 二面角 $P-BC-D$ 的大小为 45° , 求直线 PB 与平面 PAD 所成角的正弦值.



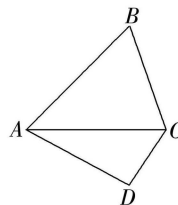
19. (12分)

如图, 平面四边形 $ABCD$ 中, $AD=5$, $CD=3$, $\angle ADC=120^\circ$.

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin A - \sin B}$.

(1) 判断四边形 $ABCD$ 是否有外接圆? 若有, 求其半径 R ; 若无, 说明理由;

(2) 求 $\triangle ABC$ 内切圆半径 r 的取值范围.



20. (12分)

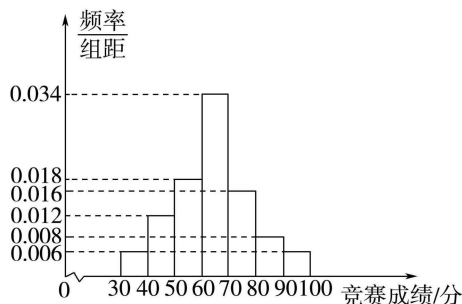
某市为了传承发展中华优秀传统文化, 组织该市中学生进行了一次数学知识竞赛. 为了解学生对相关知识的掌握情况, 随机抽取 100 名学生的竞赛成绩 (单位: 分), 并以此为样本绘制了如下频率分布直方图.

(1) 求该 100 名学生竞赛成绩的第 80 百分位数;

(2) 从竞赛成绩在 $(40, 50]$, $(50, 60]$ 的两组的学生中, 采用分层抽样的方法抽取了 10 人, 现从这 10 人中随机抽取 3 人, 记竞赛成绩在 $(40, 50]$ 的学生人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$;

(3) 以样本的频率估计概率, 从 $[30, 50]$ 随机抽取 20 名学生, 用 $P(k)$ 表示这 20 名学生中恰有 k 名学生竞赛成绩在 $[30, 40]$ 内的概率, 其中 $k=0, 1, 2, \dots, 20$.

当 $P(k)$ 最大时, 求 k .



21. (12分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 到点 $F(1, 0)$ 的距离比到 y 轴的距离大 1, 记点 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过点 F 且斜率不为零的直线 l 交椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 于 A, B 两点, 交曲线 C 于 M, N

两点, 若 $\frac{\lambda}{|AB|} - \frac{1}{|MN|}$ 为定值, 求实数 λ 的值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = a \sin x - \ln(1+x)$.

(1) 若对 $\forall x \in (-1, 0]$ 时, $f(x) \geq 0$, 求正实数 a 的最大值;

(2) 证明: $\sum_{k=2}^n \sin \frac{1}{k^2} < \ln 2$;

(3) 若函数 $g(x) = f(x) + e^{x+1} - a \sin x$ 的最小值为 m , 试判断方程 $e^{1+x-m} - \ln(1+x) = 0$ 实数根的个数, 并说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

