辽宁省沈阳市2020-2021学年高三下学期质量监测数学卷(一)试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\{-2,0,2,3\}$，集合 $B=\{x\mid -2\le x\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-2,-1,0,2,3\}$　　B．$\{-2\}$　　C．$(-2,0)$　　D．$\{-2,0\}$

2．已知i是虚数单位，则复数 $z=\dfrac{2-i^{2020}}{2+i^{2021}}$ 对应的点所在的象限是（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

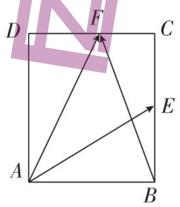
3．2020年我国进行了第七次全国人口普查，“大国点名，没你不行”.在此次活动中，某学校有2女、4男6名教师报名成为志愿者，现在有3个不同的社区需要进行普查工作，从这6名志愿者中选派3名，每人去1个小区，每个小区去1名教师，其中至少要有1名女教师，则不同的选派方案有多少种（　　）

A．16种　　B．20种　　C．96种　　D．120种

4．甲烷是一种有机化合物，分子式是 CH_4，它作为燃料广泛应用于民用和工业中.近年来科学家通过观测数据，证明了甲烷会导致地球表面温室效应不断增加.深入研究甲烷，趋利避害，成为科学家面临的新课题.甲烷分子的结构为正四面体结构，四个氢原子位于正四面体的四个顶点，碳原子位于正四面体的中心，碳原子和氢原子之间形成的四个碳氢键的键长相同、键角相等.请你用学过的数学知识计算甲烷碳氢键之间夹角的余弦值（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{3}$　　C．$-\dfrac{1}{4}$　　D．$-\dfrac{1}{5}$

5．在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在 CD 上，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值为（　　）



A．$\sqrt{2}$　　B．2

C. 0　　D. 1

6. $5G$技术的数学原理之一是著名的香农公式:$C=W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$.它表示:在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速度$C$取决于信道带宽$W$，信道内信号的平均功率S，信道内部的高斯噪声功率$N$的大小，其中$\frac{S}{N}$叫做信噪比.当信噪比较大时，公式中真数中的1可以忽略不计.假设目前信噪比为1600,若不改变带宽W，而将最大信息传播速度C提升50%,那么信噪比$\frac{S}{N}$要扩大到原来的约（　　）

A. 10倍　　B. 20倍　　C. 30倍　　D. 40倍

7. 已知随机变量$\xi\sim N\left(1,\sigma^2\right)$，且$P(\xi\le 0)=P(\xi\ge a)$，则$\frac{1}{x}+\frac{4}{a-x}(0<x<a)$的最小值为（　　）

A. 9　　B. $\frac{9}{2}$　　C. 4　　D. 6

8. 已知函数$g(x),h(x)$分别是定义在R上的偶函数和奇函数，且$g(x)+h(x)=e^x+x$,若函数$f(x)=2^{|x-1|}+\lambda g(x-1)-6\lambda^2$有唯一零点,则正实数$\lambda$的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. 2　　D. 3

二、多选题

9. 若$a>0,b>0$，则使$a>b$成立的充要条件是（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $a^2b>ab^2$　　C. $\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$　　D. $a+\frac{1}{b}>b+\frac{1}{a}$

10. 已知函数$f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $f(x)$的图象是由$y=2\sin 2x$的图象向左移$\frac{\pi}{3}$个单位得到的

B. $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$上单调递增

C. $f(x)$的对称中心的坐标是$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},0\right)(k\in Z)$

D. 函数$g(x)=f(x)-\sqrt{3}$在$[0,10]$内共有8个零点

11. 已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点$F(-1,0)$，过$F$且与$x$轴垂直

的直线与双曲线交于 A,B 两点，O 为坐标原点，$\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{3}{2}$，则下列结论正确的有（　　）

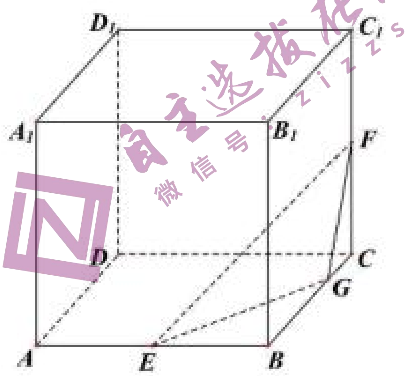
A．双曲线 C 的方程为 $4x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1$

B．双曲线 C 的两条渐近线所成的锐角为 60°

C．F 到双曲线 C 渐近线的距离为 $\sqrt{3}$

D．双曲线 C 的离心率为 2

12. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球为球 O,E、F 分别是棱 AB 和棱 CC_1 的中点，G 在棱 BC 上移动，则下列结论成立的有（　　）



A．存在点 G, 使 OD 垂直于平面 EFG

B．对于任意点 $G, OA//$ 平面 EFG

C．直线 EF 的被球 O 截得的弦长为 $\sqrt{2}$

D．过直线 EF 的平面截球 O 所得的所有圆中，半径最小的圆的面积为 $\dfrac{\pi}{2}$

三、填空题

13．在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5^2+2a_6a_8+a_9^2=100$，则 $a_5+a_9=$______.

14．若 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=$__________.

15．在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,-3)$，若圆 $C:(x-a)^2+(y-a+2)^2=1$ 上存在一点 M 满足 $|MA|=2|MO|$，则实数 a 的取值范围是__________.

16. 已知抛物线 $x^2=4y$，点 $M(t,-2), t\in(-1,1)$，过 M 作抛物线的两条切线 MA,MB，

其中 A,B 为切点，直线 AB 与 y 轴交于点 P, 则 $\dfrac{|PA|}{|PB|}$ 的取值范围是________.

四、解答题

17．请从下面三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并解答.

① $\sqrt{3}\cos A\left(c\cos B+b\cos C\right)=a\sin A$；

② $\cos C=\dfrac{2b-c}{2a}$

③ $\tan A+\tan B+\tan C=\sqrt{3}\tan B\tan C$.

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对应边分别为 a,b,c，________________.

（1）求A；

（2）若 $a=2,b+c=\sqrt{10}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

18．已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}{}^2=2S_n+n+1,a_2=2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n；

（2）若 $b_n=a_n\cdot 2^n$，数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n，求使 $T_n>2021$ 的最小的正整数 n 的值.

19．习近平总书记曾提出，“没有全民健康，就没有全面小康”.为响应总书记的号召，某社区开展了“健康身体，从我做起”社区健身活动.运动分为徒手运动和器械运动两大类.该社区对参与活动的1200人进行了调查，其中男性650人，女性550人，所得统计数据如下表所示:(单位:人)

性别	器械类	徒手类	合计
男性	590		
女性		240	
合计	900		

（1）请将题中表格补充完整，并判断能否有99%把握认为“是否选择器械类与性别有关”?

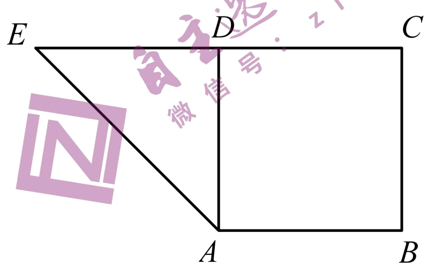
（2）为了检验活动效果，该社区组织了一次竞赛活动.竞赛包括三个项目，一个是器械类，两个是徒手类，规定参与者必需三个项日都参加.据以往经验，参赛者通过器械类竞赛的概率是 $\dfrac{4}{5}$，通过徒手类竞赛的概率都是 $\dfrac{3}{4}$，且各项目是否通过相互独立.用 ξ 表示某居民在这次竞赛中通过的项目个数，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

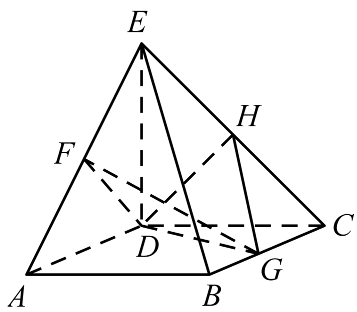
(参考数据: $1230^2=1512900, 65\times55\times9=32175, 1512900\div32175\approx47$)

附: $X^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(X^2\geq k)$	0.050	0.025	0.010	0.005
k	3.841	5.024	7.879	6.635

20．如左图，平面四边形 $ABCE$, 点 D 在边 CE 上，$CD=DE$，且 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形.沿着直线 AD 将 ΔADE 折起，使平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$ (如右图)，已知 F,H 分别是棱 EA,EC 的中点，G 是棱 BC 上一点.

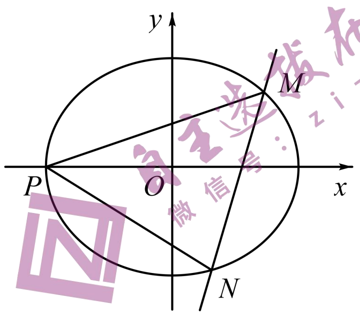




（1）求证:平面 $DFG\perp$ 平面 ABE；

（2）若直线 GH 与平面 $ABCD$ 所成的角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，求锐二面角 $F-DG-H$ 的余弦值.

21．已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3}=1$，斜率为 $k(k\neq0)$ 的直线与 C 相交于 M,N 两点.



（1）若 G 为 MN 的中点，且 $k_{OG}=-\dfrac{3}{4k}$，求椭圆 C 的方程；

（2）在（1）的条件下，若 P 是椭圆 C 的左顶点，$k_{PM}\cdot k_{PN}=-\dfrac{1}{4}$, F 是椭圆的左焦点，要使 F 在以 MN 为直径的圆内，求 k 的取值范围.

22．已知函数 $f\left(x\right)=mx\ln x-1$，$m\neq 0$．

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $g\left(x\right)=x^2-\dfrac{2}{e}x$，且关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，其中 e 是自然对数的底数，求实数 m 的取值范围．