参考答案及解析

数学(二)

一、选择题

1. D 【解析】因为 $A=\{1,3,9\}$，$B=\{3,5,9,11\}$，所以 $A\cap B=\{3,9\}$，所以 $\complement_U(A\cap B)=\{1,5,7,11\}$. 故选 D.

2. B 【解析】因为 $(1-2\mathrm{i})z=10-5\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{10-5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(10-5\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=(2-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=4+3\mathrm{i}$，所以 z 的虚部为 3. 故选 B.

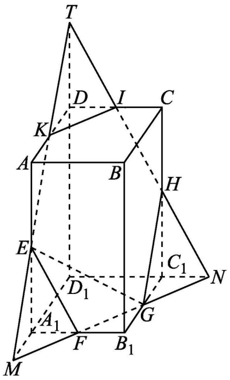
3. A 【解析】正六棱台的斜高为 $\sqrt{1^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}=2$ dm，所以该花灯的表面积为 $\frac{1}{2}\times(4+2)\times2\times6+6\times2\times6+\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2\times6+\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times6=108+30\sqrt{3}(\mathrm{dm}^2)$. 故选 A.

4. B 【解析】若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}(2-t)t+1\times3>0\\ t\neq\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $-1<t<3$ 且 $t\neq\frac{1}{2}$. 故选 B.

5. C 【解析】当丙站在左端时，有 $\mathrm{A}_3^3=6$ 种站法；当丙不站在左端时，有 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_2^2\mathrm{A}_3^3=24$ 种站法，所以一共有 30 种不同的站法. 故选 C.

6. A 【解析】因为 $\sin(10^\circ-\theta)+\sin(10^\circ+\theta)+\sqrt{3}\sin(20^\circ+\theta)=2\sin10^\circ\cos\theta+\sqrt{3}\sin20^\circ\cos\theta+\sqrt{3}\cos20^\circ\sin\theta=0$，所以 $\tan\theta=\frac{2\sin10^\circ+\sqrt{3}\sin20^\circ}{-\sqrt{3}\cos20^\circ}=\frac{2\sin(30^\circ-20^\circ)+\sqrt{3}\sin20^\circ}{-\sqrt{3}\cos20^\circ}=\frac{2\times\left(\frac{1}{2}\cos20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin20^\circ\right)+\sqrt{3}\sin20^\circ}{-\sqrt{3}\cos20^\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

7. D 【解析】如图，延长 GF 交 D_1A_1 的延长线于点 M，交 D_1C_1 的延长线于点 N，连接 ME 并延长交 AD 于点 K，交 D_1D 的延长线于点 T，连接 TN，分别交 CD，CC_1 于点 I，H，连接 KI，GH，则六边形 $EFGHIK$ 所在平面即为平面 EFG. 由全等三角形可知，K，I，H 分别为 AD，CD，CC_1 的中点，因为 $AA_1=2AB=4$，所以 $EF=GH=EK=HI=\sqrt{5}$，$FG=KI=\sqrt{2}$，所以六边形 $EFGHIK$ 的周长为 $2\sqrt{2}+4\sqrt{5}$. 故选 D.



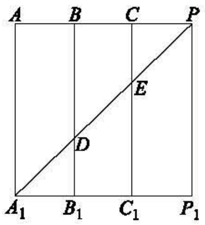
8. C 【解析】因为对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，即对任意两个不相等的正实数 x_1，x_2，都有 $\frac{\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}}{x_1-x_2}=\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1-x_2}<0$，所以函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $g(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 当 $x-2>0$，即 $x>2$ 时，由 $f(x-2)<\frac{f(x^2-4)}{x+2}$，得 $\frac{f(x-2)}{x-2}<\frac{f(x^2-4)}{x^2-4}$，所以 $x-2>x^2-4$，此时无解；当 $x-2<0$，即 $x<2$ 时，由 $f(x-2)<\frac{f(x^2-4)}{x+2}$，得 $\frac{f(x-2)}{x-2}>\frac{f(x^2-4)}{x^2-4}$，所以 $|x-2|<|x^2-4|$，解得 $x<-3$ 或 $-1<x<2$. 综上所述，不等式 $f(x-2)<\frac{f(x^2-4)}{x+2}$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(-1,2)$. 故选 C.

二、选择题

9. BD 【解析】由图象可得 $A=2$，且 $f(0)=2\sin\varphi=1$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-2$，所以 $\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=3k+2$，$k\in\mathbf{Z}$，由图象可知 $T=\frac{2\pi}{\omega}>\frac{2\pi}{3}$，解得 $\omega<3$，又 $\omega>0$，所以 $\omega=2$，故 A 错误；所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

当 $x=-\frac{\pi}{12}$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}=0$，故 B 正确；当 $x=\frac{17\pi}{12}$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}=3\pi$，此时 $f(x)$ 不取最值，故 C 错误；当 $x\in\left(-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，此时 $f(x)$ 单调递减，故 D 正确. 故选 BD.

10. ABD 【解析】正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $V_{ABC-A_1B_1C_1}=S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot AA_1=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，由图可知 $V_1+V_2+V_3<V_{ABC-A_1B_1C_1}$，所以 $V_1+V_2+V_3<\frac{3\sqrt{3}}{4}$，所以 A 正确；沿着侧棱 AA_1 将棱柱展开得到一个矩形 A_1P_1PA，连接 A_1P，



因为 $A_1D+DE+EA$ 取得最小值，即线段 A_1P，所以 $DB_1=1$，$EC_1=2$，因为 F 为 AA_1 的中点，所以 $V_1=\frac{1}{3}S_{B_1C_1ED}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$V_2=V_{E-A_1FD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$，$V_3=V_{E-AFD}=V_{E-A_1FD}=V_2$，所以 B 正确，C 不正确，D 正确. 故选 ABD.

11. ACD 【解析】因为 $|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，所以 $a^2+a^2+3=5$，解得 $a^2=1$，故双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$. 对于 A，双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{5}$，故 A 正确；对于 B，由题可得 $F_1(-\sqrt{5},0)$，又 $PF_1\perp x$ 轴，所以 $x_P=-\sqrt{5}$，则 $5-\frac{y_P^2}{4}=1$，解得 $y_P=\pm4$，所以 $|PF_1|=4$，故 B 错误；对于 C，因为 $|PF_1|=2|PF_2|$，且 $|PF_1|-|PF_2|=2$，所以 $|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$，所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，所以 $PF_1\perp PF_2$，所以 $|PO|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=\sqrt{5}$，故 C 正确；对于 D，设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2-\frac{y_0^2}{4}=1$，因为双曲线 C 的渐近线方程为 $x-\frac{y}{2}=0$ 或 $x+\frac{y}{2}=0$，所以点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离之积为 $\frac{\left|x_0-\frac{y_0}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{\left|x_0+\frac{y_0}{2}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{4}{5}\left|x_0^2-\frac{y_0^2}{4}\right|=\frac{4}{5}$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. ABD 【解析】由 $a^2+ab+b^2=3$，得 $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=3$，令 $\begin{cases}a+\frac{1}{2}b=\sqrt{3}\cos\theta\\ \frac{\sqrt{3}}{2}b=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta\\ b=2\sin\theta\end{cases}$，所以 $a-b=\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta=2\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\in[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$，故 A 正确；因为 $a+2b=\sqrt{3}\cos\theta+3\sin\theta=2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$，故 B 正确；$a+\frac{1}{2}b=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，故 C 错误；$a^2+b^2-ab=3-2ab=3-2(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)\cdot2\sin\theta=3-4\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+4\sin^2\theta=3-2\sqrt{3}\sin2\theta+2(1-\cos2\theta)=5-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right)=5-4\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in[1,9]$，故 D 正确. 故选 ABD.

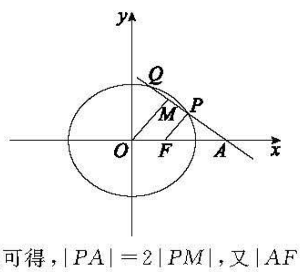
三、填空题

13. 0.39 【解析】因为 $X\sim N(5,\sigma^2)$，所以正态曲线的对称轴是直线 $\mu=5$，因为 $P(X<0)=0.11$，所以 $P(5\leqslant X\leqslant10)=P(0\leqslant X\leqslant5)=0.5-0.11=0.39$.

14. $-\frac{2}{3}$ 【解析】设切点为 (x_0,y_0)，则 $y_0=-3x_0+\frac{1}{3}$，且 $y_0=e^{-3x_0+a}$，由 $f(x)=e^{-3x+a}$，得 $f'(x)=-3e^{-3x+a}$，所以 $-3e^{-3x_0+a}=-3$，所以 $-3x_0+a=0$，所以 $y_0=1$，所以 $x_0=-\frac{2}{9}$，则 $a=-\frac{2}{3}$.

15. $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 【解析】以线段 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=4$，因为 $\angle AMB<90^\circ$，所以点 M 在以线段 AB 为直径的圆外，所以圆心 $(0,0)$ 到直线 $y=kx+3$ 的距离 $d=\frac{3}{\sqrt{k^2+1}}>2$，解得 $-\frac{\sqrt{5}}{2}<k<\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

16. $\sqrt{3}$ 【解析】如图，取线段 PQ 的中点为 M，连接 OM，PF，



则由题意可得，$|PA|=2|PM|$，又 $|AF|=2|FO|$，所以 $PF\parallel MO$. 因为直线 PQ，PF 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$，所以 $k_{PQ}\cdot k_{OM}=-\frac{3}{4}$. 设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,$

y_2），则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，两式相减可得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$，整理得 $\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=-\frac{b^2}{4}$，即 $k_{PQ}\cdot k_{OM}=-\frac{b^2}{4}=-\frac{3}{4}$，所以 $b^2=3$，所以 $b=\sqrt{3}$.

四、解答题

17. **解**：(1)设 $CD=2AD=2a,a>0$，

因为△ACD 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle ADC=120°$，

所以$\frac{1}{2}\times 2a\times a\times\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $a=1$，

所以 $AB=CD=2,AD=1$.　　（1 分）

在△ACD 中，由余弦定理得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos 120°$

$=1+4-2\times 2\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$，

所以 $AC=\sqrt{7}$.　　（3 分）

在 Rt△ABC 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，

所以 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{7-4}=\sqrt{3}$，

所以 $\sin\angle CAB=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.　　（5 分）

(2)由(1)可得 $CD=2,AC=\sqrt{7}$，

在△ACD 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，

所以 $\sin\angle CAD=\frac{CD\sin\angle ADC}{AC}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，且 $0°<\angle CAD<60°$.　　（8 分）

由(1)可得 $\sin\angle CAB=\frac{\sqrt{21}}{7}$，

又 $0°<\angle CAB<90°$，

所以 $\angle CAB=\angle CAD$.　　（10 分）

18. **解**：(1)记该朝阳区 100 名天文爱好者年龄的 75% 分位数为 x，

则 $10\times 0.016+10\times 0.036+(x-20)\times 0.028=0.75$，　　（4 分）

解得 $x\approx 28.21$，

故估计该朝阳区 100 名天文爱好者年龄的 75% 分位数为 28.21 岁.　　（6 分）

(2)记事件 A 为："任选一人，此人年龄位于区间[20,30)"，

事件 B 为："任选一人，此人是天文爱好者"，

由条件概率公式可得，$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A)}=\frac{(0.028\times 10)\times 11\%}{25\%}=0.1232\approx 0.12$，　　（11 分）

故此人是天文爱好者的概率约为 0.12.　　（12 分）

19. **解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由题意可知 $a_n=1+(n-1)d$，$b_n-1=(b_1-1)\cdot 2^{n-1}$，　　（2 分）

因为 $a_3=b_2$，$a_6+b_3=20$，

所以 $1+2d=2(b_1-1)+1$，$1+5d+4(b_1-1)+1=20$，

解得 $b_1=3,d=2$，　　（4 分）

所以 $a_n=2n-1,b_n=2^n+1$.　　（5 分）

(2)因为 $2^k<2^k+1<2^{k+1}$，

所以 $k<\log_2(2^k+1)<k+1$，

所以 $[\log_2 b_k]=k$.

因为 $a_m=2m-1$，$a_{2m}=4m-1$，

所以当 $m=1$ 时，$a_1<[\log_2 b_k]<a_2$，

则 $1<k<3$；

当 $m=2$ 时，$a_2<[\log_2 b_k]<a_4$，

则 $3<k<7$；

当 $m=3$ 时，$a_3<[\log_2 b_k]<a_6$，

则 $5<k<11$；

依次类推，当 $m=10$ 时，$a_{10}<[\log_2 b_k]<a_{20}$，

则 $19<k<39$，　　（9 分）

又 $k\in\mathbf{N}^*$，且集合中的元素互异，

所以集合$\{k\in\mathbf{N}^*\mid a_m<[\log_2 b_k]<a_{2m},1\leqslant m\leqslant 10\}$中元素的个数为 $1+3+5+\cdots+19-(1+3+\cdots+15)=17+19=36$ 个.　　（12 分）

20. **解**：(1)在平面 $ABCD$ 内过点 M 作 $MF\parallel BC$ 交 AB 于点 F，连接 NF，

则四边形 $MCBF$ 为平行四边形，

所以 $FB=MC=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}$，

所以 $AF=3FB$，　　（2 分）

又 $AN=3SN$，

所以 $NF\parallel SB$，

因为 $NF\not\subset$平面 SBC，$SB\subset$平面 SBC，

所以 $NF\parallel$平面 SBC.

因为 $MF\parallel BC$，$MF\not\subset$平面 SBC，$BC\subset$平面 SBC，

所以 $MF\parallel$平面 SBC，　　（3 分）

又 $NF\cap MF=F$，$NF,MF\subset$平面 MNF，

所以平面 $MNF\parallel$平面 SBC，

又 $MN\subset$平面 MNF，

所以 $MN\parallel$平面 SBC.　　（4 分）

(2)取 AD 的中点 O，连接 SO,BO，

因为 $AB\parallel CD$，$AB\perp BC$，$AB=2CD=2BC=2$，

所以 $AD=BD=\sqrt{2}$，

所以 $AD^2+BD^2=AB^2$，

所以 $AD\perp BD$，

又 $SA=SD=1$，$AD=\sqrt{2}$，

所以 $SA\perp SD$，$SO\perp AD$，

所以 $SO=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

在$\triangle BDO$中,$BO^2=BD^2+OD^2=\frac{5}{2}$,

又 $SB=\sqrt{3}$,

所以 $SB^2=SO^2+BO^2$,

所以 $SO\perp OB$,

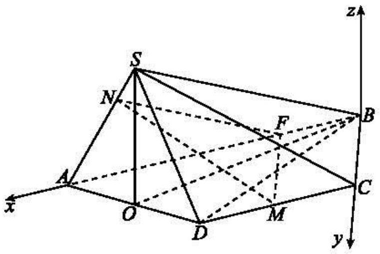
又 $AD\cap BO=O$,$AD,BO\subset$平面 $ABCD$,

所以 $SO\perp$平面 $ABCD$. (6分)

过 B 作 $Bz\parallel SO$,则 $Bz\perp$平面 $ABCD$,

则 BA,BC,Bz 两两垂直,

所以以 B 为坐标原点,BA,BC,Bz 所在的直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $B(0,0,0)$,$C(0,1,0)$,$D(1,1,0)$,$S\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{BS}=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{BD}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. (8分)

设平面 SBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BS}=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=x+y=0\end{cases}$,

取 $x=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-\sqrt{2})$, (10分)

设直线 SC 与平面 SBD 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{SC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{SC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{SC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+1\right|}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

即直线 SC 与平面 SBD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$. (12分)

21.**解**:(1)设 $A(x_0,y_0)$,$x_0\geqslant 0$,

由题意知准线 l:$x=-\frac{p}{2}$,$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,

由抛物线的定义可知点 A 到点 F 的距离等于点 A 到准线 l 的距离,

所以点 A 到点 F 的距离与到直线 $x=-2$ 的距离之和为 $x_0+\frac{p}{2}+x_0+2=2x_0+2+\frac{p}{2}$,

由题意知当 $x_0=0$ 时,距离之和最小,

所以 $2+\frac{p}{2}=3$,解得 $p=2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. (4分)

(2)由(1)可得 $F(1,0)$.

由题意可知直线 l' 的斜率不为0,

故设 $A(x_1,y_1)$,直线 l':$x-x_1=m(y-y_1)$,

联立$\begin{cases}x-x_1=m(y-y_1)\\ y^2=4x\end{cases}$,

化简得 $y^2-4my+4my_1-4x_1=0$, (6分)

则 $\Delta=16m^2-16my_1+16x_1=0$,

即 $\Delta=16m^2-16my_1+4y_1^2=4(2m-y_1)^2=0$,

解得 $m=\frac{y_1}{2}$,

所以直线 l':$x-x_1=\frac{y_1}{2}(y-y_1)$,即 $y_1y=2(x+x_1)$. (8分)

若选择①②作为条件,证明③成立:

设 $B(x_2,y_2)$,$y_2\neq y_1\neq 0$,

同理可得直线 PB:$y_2y=2(x+x_2)$, (10分)

设 $P(-1,t)$,则 $ty_1=2(-1+x_1)$,$ty_2=2(-1+x_2)$,

所以点 A,B 在直线 $ty=2(x-1)$上,

所以点 F 在直线 AB 上,即③成立. (12分)

若选择②③作为条件,证明①成立:

设 $B(x_2,y_2)$,$y_2\neq y_1\neq 0$,

同理可得直线 PB:$y_2y=2(x+x_2)$,

联立$\begin{cases}y_2y=2(x+x_2)\\ y_1y=2(x+x_1)\end{cases}$,即$\begin{cases}y_2y=2\left(x+\frac{y_2^2}{4}\right)\\ y_1y=2\left(x+\frac{y_1^2}{4}\right)\end{cases}$,

解得 $x_P=\frac{y_1y_2}{4}$. (10分)

设直线 AB:$x=ty+1$,

联立$\begin{cases}x=ty+1\\ y^2=4x\end{cases}$,得 $y^2-4ty-4=0$,

则 $\Delta=16t^2+16>0$,$y_1y_2=-4$,

所以 $x_P=\frac{y_1y_2}{4}=-1$,

所以点 P 在 l 上,即①成立. (12分)

若选择①③作为条件,证明②成立:

设 $B(x_2,y_2)$,$y_2\neq y_1\neq 0$,

同理若直线 PB 与 C 相切,则直线 PB:$y_2y=2(x+x_2)$,

在直线 l':$y_1y=2(x+x_1)$中,令 $x=-1$,

得 $y=\frac{2(x_1-1)}{y_1}$,

所以 $P\left(-1,\frac{2(x_1-1)}{y_1}\right)$. (9分)

设直线 AB:$x=ty+1$,

联立$\begin{cases}x=ty+1\\ y^2=4x\end{cases}$,得 $y^2-4ty-4=0$,

则 $\Delta=16t^2+16>0$,$y_1y_2=-4$,

则 $y_2=-\frac{4}{y_1}$,

所以 $B\left(\frac{4}{y_1^2},-\frac{4}{y_1}\right)$, (10 分)

所以 $k_{PB}=\frac{-\frac{4}{y_1}-\frac{2(x_1-1)}{y_1}}{\frac{4}{y_1^2}+1}=\frac{-4y_1-2(x_1-1)y_1}{4+y_1^2}$

$=\frac{-4y_1-2\left(\frac{y_1^2}{4}-1\right)y_1}{4+y_1^2}=\frac{-\frac{y_1}{2}(4+y_1^2)}{4+y_1^2}=-\frac{y_1}{2}=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{y_2}\right)=\frac{2}{y_2}$,

则直线 PB: $y-\frac{2(x_1-1)}{y_1}=\frac{2}{y_2}(x+1)$,

又 $y_1y_2=-4$, $y_2^2=4x_2$,

所以 PB: $y_2y=2(x+x_2)$,

所以直线 PB 与 C 相切,即②成立. (12 分)

22. 解:(1)当 $m=-3$ 时,$f(x)=\ln x-3x$, $x>0$,

则 $f'(x)=\frac{1}{x}-3=\frac{1-3x}{x}$,

令 $f'(x)>0$,得 $0<x<\frac{1}{3}$;令 $f'(x)<0$,得 $x>\frac{1}{3}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$,单调递减区间为 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$. (3 分)

(2)由 $f(x)<\frac{m}{x}$,得 $\ln x+m\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$,

设 $g(x)=\ln x+m\left(x-\frac{1}{x}\right)$, $x\in(1,+\infty)$,

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$\ln x>0$, $x-\frac{1}{x}>0$,

所以当 $m\geqslant 0$ 时,$g(x)>0$,不符合题意. (4 分)

当 $m<0$ 时,$g'(x)=\frac{1}{x}+m\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{mx^2+x+m}{x^2}$,

设 $h(x)=mx^2+x+m$, $x\in(1,+\infty)$,

其图象为开口向下的抛物线,对称轴为 $x=-\frac{1}{2m}>0$,

当 $-\frac{1}{2m}>1$,即 $-\frac{1}{2}<m<0$ 时,

因为 $h(1)=2m+1>0$,

所以当 $x\in\left(1,-\frac{1}{2m}\right)$ 时,$h(x)>0$,即 $g'(x)>0$,

此时 $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)>g(1)=0$,不符合题意. (6 分)

当 $0<-\frac{1}{2m}\leqslant 1$,即 $m\leqslant-\frac{1}{2}$ 时,$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)<h(1)=2m+1\leqslant 0$,

所以 $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(x)<g(1)=0$,符合题意.

综上所述,m 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$. (8 分)

(3)由(2)可得当 $x>1$ 时,$\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<0$,

即 $2\ln x<x-\frac{1}{x}$,

令 $x=\frac{n+1}{n}$, $n\in\mathbf{N}^*$,

则 $2\ln\frac{n+1}{n}<\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n+1}=\frac{2n+1}{n^2+n}$, (10 分)

所以 $2\ln\frac{2}{1}<\frac{3}{1^2+1}$, $2\ln\frac{3}{2}<\frac{5}{2^2+2}$, $\cdots$, $2\ln\frac{n+1}{n}<\frac{2n+1}{n^2+n}$,

以上各式相加得 $2\left(\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\right)<\frac{3}{1^2+1}+\frac{5}{2^2+2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2+n}$,

即 $2\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)<\frac{3}{1^2+1}+\frac{5}{2^2+2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2+n}$,

所以 $2\ln(n+1)<\frac{3}{1^2+1}+\frac{5}{2^2+2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2+n}$. (12 分)

关于我们

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线