绝密★启用前

九江市2023年第三次高考模拟统一考试

数　学（文科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分. 全卷满分150分，考试时间120分钟.

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的学号、姓名等项内容填写在答题卡上.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，第Ⅱ卷用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效.
3. 考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回.

第Ⅰ卷（选择题60分）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知集合 $M=\{x|x>\frac{1}{2}\}$，$N=\{x|y=\sqrt{2x-x^2}\}$，则 $(\complement_R M)\cap N=$

A. $\{x|0\le x\le\frac{1}{2}\}$　B. $\{x|0<x<\frac{1}{2}\}$　C. $\{x|x\le\frac{1}{2}\}$　D. $\{x|x\le 0\}$

2. 已知复数 z 满足 $z\cdot(2+i)=\bar{z}-4i$，则 $|z|=$

A. 1　B. $\sqrt{2}$　C. 2　D. $2\sqrt{2}$

3. 已知 $a=2^{0.2}$，$b=\log_{0.2}0.5$，$c=\log_2 0.2$，则

A. $b>a>c$　B. $b>c>a$　C. $a>b>c$　D. $a>c>b$

4. 为了强化节约意识，更好地开展"光盘行动"，某校组织社会实践小组对某块稻田的稻穗进行调研，小组随机抽取了20株稻穗，并统计了每株稻穗的粒数，整理得到如右茎叶图，则每穗粒数的中位数和平均数分别是

15	8
16	3 3 6
17	1 1 2 3 3 4 4 5 6 8 8 8
18	3 7 8
19	9

A. 174，175　B. 175，175
C. 175，174　D. 174，174

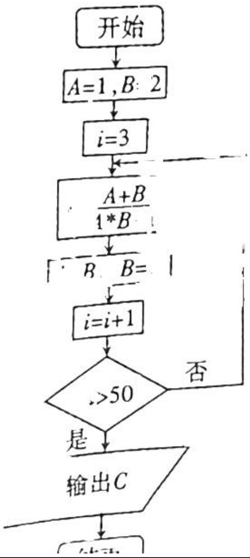
5. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{7}}{5}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$

A. $-\frac{1}{15}$　B. $-\frac{13}{15}$

C. $-\frac{4\sqrt{14}}{15}$　D. $\frac{2\sqrt{14}}{15}$

6. 执行如图所示的算法框图，则输出的 C 的值为

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3



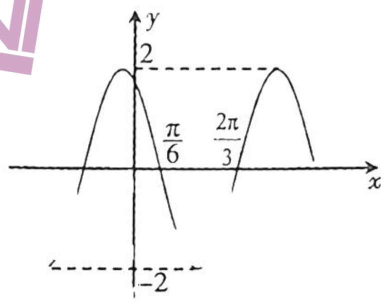
7. 若数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=q$（$q$为常数，且$q\neq1$），则称$\{a_n\}$为差等比数列，其中$q$为公差比. 已知差等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_2=6$，且公差比为2，则$a_{10}=$

A. 1024　　B. 1022　　C. 2048　　D. 2046

8. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，$A,B$为平面内异于$F_1,F_2$的两点. 若$AB$的中点$P$在$C$上，且$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AF_1}$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AF_2}$，则$|BC|+|BD|=$

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 8　　D. $8\sqrt{2}$

9. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi$）的部分图像如图所示. 若$g(x)=f(x)+f(-x)$，则$g(x)$的最大值为



A. 2　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

10. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，$f(x+1)$是奇函数，$f(x-1)$的图像关于直线$x=1$对称，则$f(x)$

A. 在$[2020,2022]$上单调递减　　B. 在$[2021,2023]$上单调递增

C. 在$[2022,2024]$上单调递减　　D. 在$[2023,2025]$上单调递增

11. 榫卯是一种中国传统建筑、家具的主要结构方式，它凝聚了中华文明的智慧. 它利用材料本身特点自然连接，既符合力学原理，又重视实用和美观，达到了实用性和功能性的完美统一. 右图是榫卯结构中的一种，当其合并在一起后，可形成一个正四棱柱. 将合并后的榫卯对应拿开（如图1所示），已知榫的俯视图（如图2所示），则卯的主视图为

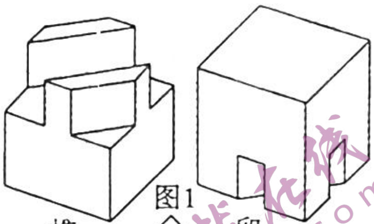
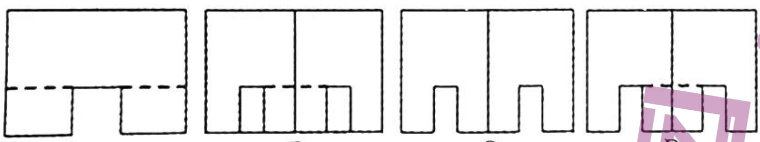
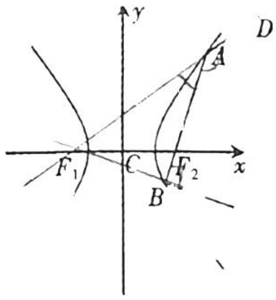


图1


图2



12. 从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过另外一个焦点. 如图所示，已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a,b>0$）的左右焦点分别为$F_1,F_2$，从右焦点$F_2$发出的两条方向相反的光线经双曲线上两点$A,B$反射后，其中反射光线$BC$垂直于$AB$，反射光线$AD$满足$\sin\angle BAD=\frac{3}{5}$，则该双曲线的离心率为



A. $\sqrt{10}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

第Ⅱ卷(非选择题 90 分)

考生注意:

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 – 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22 – 23 题为选考题,学生根据要求作答.

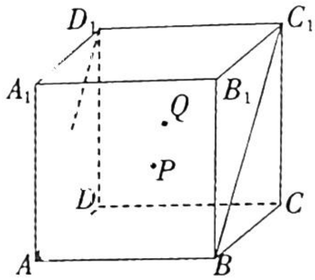
二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. Rt△ABC 中,$A=90°$,$AB=2$,D 为 BC 的中点,则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$ ______.

14. △ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $a\sin A=(c-b)\sin C+b\sin B$,$bc=6$,则△$ABC$ 的面积为______.

15. 已知函数 $f(x)=e^x-ax^2(a\in\mathbf{R})$有两个极值点 x_1,x_2,且 $x_1=2x_2$,则 $a=$ ______.

16. 如图,棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,P,Q 为四边形 ABC_1D_1 内的点(包括边界),且点 P 到 AB 的距离等于到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离,点 Q 到 C_1D_1 的距离等于到平面 $ABCD$ 的距离,则$|PQ|$的最小值为______.



三、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且满足 $a_1=\frac{1}{2}$,$a_n+S_{n-1}S_n=0(n\geq2)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

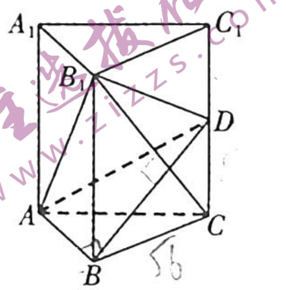
(2)求数列$\{(2n+1)a_n^2\}$的前 n 项和.

18. (本小题满分 12 分)

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB\perp BC$,D 为 CC_1 的中点,$BB_1=\sqrt{2}BC$.

(1)求证:平面 $AB_1C\perp$平面 ABD;

(2)若 $AB=BD=\sqrt{3}$,求三棱锥 B_1-ABD 的体积.



19. (本小题满分 12 分)

2023 年,国家不断加大对科技创新的支持力度,极大鼓舞了企业投入研发的信心,增强了企业的创新动能. 某企业在国家一系列优惠政策的大力扶持下,通过技术革新和能力提升,极大提升了企业的影响力和市场知名度,订单数量节节攀升,右表为该企业今年 1 ~4 月份接到的订单数量.

月份 t	1	2	3	4
订单数量 y(万件)	5.2	5.3	5.7	5.8

(1)试根据样本相关系数 r 的值判断订单数量 y 与月份 t 的线性相关性强弱($0.75\leq|r|\leq1$,则认为 y 与 t 的线性相关性较强,$|r|<0.75$,则认为 y 与 t 的线性相关性较弱). (结果保留两位小数)

(2)建立y关于t的线性回归方程,并预测该企业5月份接到的订单数量.

附:相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$,回归方程 $y=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$,$\sqrt{1.3}\approx1.14$.

20.(本小题满分12分)

在平面直角坐标系xOy中,已知抛物线$E:y^2=2px(p>0)$的焦点为F,A,B为E上两点,且点A的纵坐标为$\sqrt{6}$,F恰好是$\triangle AOB$的重心.

(1)求E的方程;

(2)若$N(1,2)$,P,Q为抛物线上相异的两个动点,且$NP\perp NQ$,求$|PF|+|QF|$的最小值.

21.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=\dfrac{e^x}{ax-1}(a<0)$在$x=1$处的切线斜率为$-\dfrac{e}{4}$.

(1)求a的值;

(2)若$x\geq1$,$f(x-1)\leq\ln x-m(x-1)-1$,求实数m的取值范围.

请考生在第22-23题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.

22.(本小题满分10分)**选修4—4:坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系xOy中,已知曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2t^2\\y=2t\end{cases}$($t$为参数).以$O$为极点,$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系,直线$l$的极坐标方程为$\rho\sin(\alpha-\theta)=\sqrt{2}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})$,其中$\alpha$为倾斜角,且$\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3})$.

(1)求曲线C的普通方程和直线l的直角坐标方程;

(2)设l与曲线C相交于P,Q两点,直线OP,OQ的斜率为k_1,k_2,求k_1+k_2的取值范围.

23.(本小题满分10分)**选修4—5:不等式选讲**

设a,b,c均为正数,已知函数$f(x)=|x-a|+|x+b|+c$的最小值为4.

(1)求$a^2+b^2+c^2$的最小值;

(2)证明:$\dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq8$.

命题人:李高飞、周宝、王锋、卢志鹏、付磊波;审稿人:孙善惠、段训明、林健航

九江市2023年第三次高考模拟统一考试

数 学 试 题（文科）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分. 全卷满分150分，考试时间120分钟.

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名等内容填写在答题卡上.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，第Ⅱ卷用黑色签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上作答，答案无效.

第Ⅰ卷（选择题60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x\mid x>\frac{1}{2}\}$，$N=\{x\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=$（ A ）

A. $\{x\mid 0\le x\le\frac{1}{2}\}$　　B. $\{x\mid 0<x<\frac{1}{2}\}$　　C. $\{x\mid x\le\frac{1}{2}\}$　　D. $\{x\mid x\le 0\}$

解：$\because \complement_{\mathbf{R}}M=\{x\mid x\le\frac{1}{2}\}$，$N=\{x\mid 0\le x\le 2\}$，$\therefore(\complement_{\mathbf{R}}M)\cap N=\{x\mid 0\le x\le\frac{1}{2}\}$，故选A.

2. 已知复数 z 满足 $z\cdot(2+\mathrm{i})=\bar{z}-4\mathrm{i}$，则 $|z|=$（ B ）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

解：设 $z=a+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbf{R}$），则 $(a+b\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=a-b\mathrm{i}-4\mathrm{i}$，即 $(2a-b)+(a+2b)\mathrm{i}=a-(b+4)\mathrm{i}$，

$\therefore\begin{cases}2a-b=a\\a+2b=-b-4\end{cases}$，解得 $a=b=-1$，$\therefore z=-1-\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{2}$. 故选B.

3. 已知 $a=2^{0.2}$，$b=\log_{0.2}0.5$，$c=\log_2 0.2$，则（ C ）

A. $b>a>c$　　B. $b>c>a$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

解：$\because a=2^{0.2}>2^0=1$，$0=\log_{0.2}1<b=\log_{0.2}0.5<\log_{0.2}0.2=1$，$c=\log_2 0.2<\log_2 1=0$，$\therefore a>b>c$.

故选C.

4. 为了强化节约意识，更好地开展“光盘行动”，某校组织社会实践小组对某块稻田的稻穗进行调研，小组随机抽取了20株稻穗，并统计了每株稻穗的粒数，整理得到如右茎叶图，则每穗粒数的中位数和平均数分别是（A）

15	8
16	3 3 6
17	1 1 2 3 3 4 4 5 6 8 8 8
18	3 7 8
19	9

A. 174，175　　B. 175，175

C. 175，174　　D. 174，174

解：中位数为174，平均数为

$174+\frac{1}{20}(-16-11-11-8-3-3-2-1-1+0+0+1+2+4+4+4+9+13+14+25)=175$，故选A.

5. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{7}}{5}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$（ A ）

A. $-\frac{1}{15}$　　B. $-\frac{13}{15}$　　C. $-\frac{4\sqrt{14}}{15}$　　D. $\frac{2\sqrt{14}}{15}$

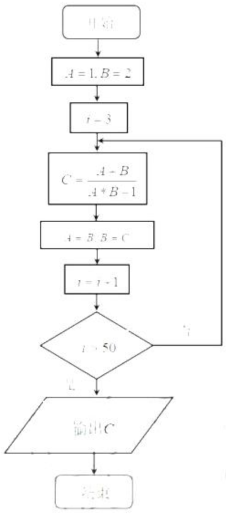
解：$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\cos\beta=-\frac{\sqrt{7}}{5}$，

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{7}{25}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{3}\times(-\frac{\sqrt{7}}{5})+\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{5}=-\frac{1}{15}$，故选 A.

6. 执行如图所示的算法框图，则输出的 C 的值为（ C ）

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3



解：由题意，输入 $A=1,B=2,i=3$，执行程序框图，

$C=3,A=2,B=3,i=4\leq 50$，执行循环体；

$C=1,A=3,B=1,i=5\leq 50$，执行循环体；

$C=2,A=1,B=2,i=6\leq 50$，执行循环体；

$C=3,A=2,B=3,i=7\leq 50$，执行循环体；

所以 C 是以 3 为周期的周期数列，

当 $i=50$ 时，执行循环体，$C=2$，$A=1,B=2,i=51>50$，结束循环体，所以输出的 C 的值为 2．故选 C.

7. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=q$（$q$ 为常数，且 $q\neq 1$），则称 $\{a_n\}$ 为差等比数列，其中 q 为公差比. 已知差等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_2=6$，且公差比为 2，则 $a_{10}=$（ D ）

A. 1024　　B. 1022　　C. 2048　　D. 2046

解：$\because a_1=2$，$a_2=6$，$\therefore a_2-a_1=4\neq 0$，$\because \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2$，

$\therefore$ 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，$\therefore a_{n+1}-a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$，

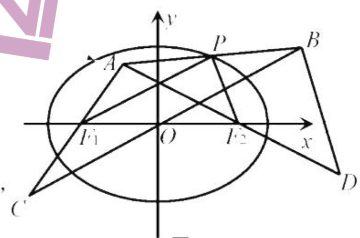
$\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2^n+2^{n-1}+\cdots+2^2+2=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，

2

$\therefore a_{10}=2^{11}-2=2048-2=2046$，故选 D.

8. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，A,B 为平面内异于 F_1,F_2 的两点. 若 AB 的中点 P 在 C 上，且 $\vec{AC}=2\vec{AF_1}$，$\vec{AD}=2\vec{AF_2}$，则 $|BC|+|BD|=$（ D ）

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 8　　D. $8\sqrt{2}$



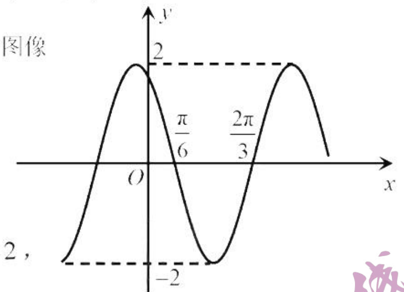
解：如图所示，连接 PF_1，PF_2，$\because \vec{AC}=2\vec{AF_1}$，$\vec{AD}=2\vec{AF_2}$，

$\therefore F_1,F_2$ 分别为线段 AC,AD 的中点，$\because P$ 为 AB 的中点，

$\therefore PF_1,PF_2$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的中位线，$\therefore |BC|=2|PF_1|$，

$|BD|=2|PF_2|$，$\because P$ 在 C 上，$\therefore |PF_1|+|PF_2|=2a=4\sqrt{2}$，$\therefore |BC|+|BD|=8\sqrt{2}$，故选 D.

9. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0,\omega>0,|\varphi|<\pi$）的部分图像如图所示. 若 $g(x)=f(x)+f(-x)$，则 $g(x)$ 的最大值为（ D ）



A. 2　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. 4　　D. $2\sqrt{3}$

解：由图可知 $A=2$，$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$T=\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，又 $f(\frac{\pi}{6})=2\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=0$，且在 $(0,\frac{\pi}{6})$ 单调递减，$\therefore \frac{\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore \varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\pi$，$\therefore \varphi=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore f(x)=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$，

$\therefore g(x)=f(x)+f(-x)=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})+2\sin(-2x+\frac{2\pi}{3})=2\sqrt{3}\cos 2x$，故 $g(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$. 故选 D.

10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，$f(x+1)$ 是奇函数，$f(x-1)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，则 $f(x)$（ C ）

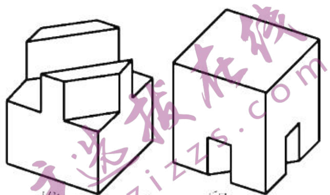
A. 在 $[2020,2022]$ 上单调递减　　B. 在 $[2021,2023]$ 上单调递增

C. 在 $[2022,2024]$ 上单调递减　　D. 在 $[2023,2025]$ 上单调递增

解：$\because f(x+1)$ 是奇函数，$\therefore f(x+1)=-f(-x+1)$，即 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，又 $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，$\therefore f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，即 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增. 由 $f(x+1)=-f(-x+1)$ 可得 $f(2-x)=-f(x)$，由 $f(x-1)$ 图像关于直线 $x=1$ 对称可知 $f(x)$ 为偶函数，

$\therefore f(2-x)=f(x-2)=-f(x)$，$\therefore f(x+4)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是周期函数，最小正周期为 4，$\therefore f(x)$ 在 $[2022,2024]$ 上单调递减，故选 C.

11. 榫卯是一种中国传统建筑、家具的主要结构方式，它凝聚了中华文明的智慧. 它利用材料本身特点自然连接，既符合力学原理，又重视实用和美观，达到了实用性和功能性的完美统一. 右图是榫卯结构中的一种，当其合并在一起后，可形成一个正四棱柱. 将合并后的榫卯对应拿开(如图1所示)，已知榫的俯视图如图2所示，则卯的主视图为（ C ）


榫 图1 卯

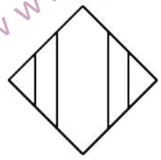
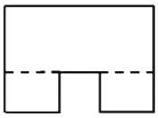
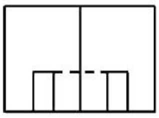
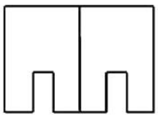
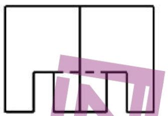


图2

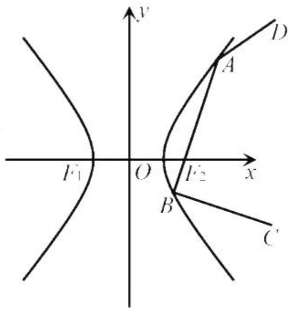

A


B


C


D

12. 从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过另外一个焦点. 如图所示，已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，从右焦点 F_2 发出的两条方向相反的光线经双曲线上两点 A,B 反射后，其中反射光线 BC 垂直于 AB，反射光线 AD 满足 $\sin\angle BAD=\frac{3}{5}$，则该双曲线的离心率为（ B ）



A. $\sqrt{10}$　　　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

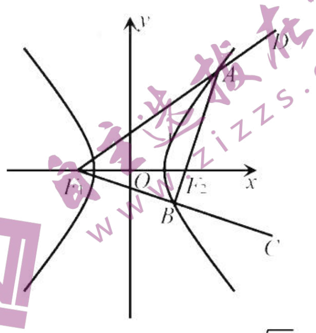
C. $\sqrt{5}$　　　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

解：如图，连接 AF_1,BF_1，由双曲线的光学性质可知，

$\angle ABF_1=\frac{\pi}{2}$，$\sin\angle F_1AB=\frac{3}{5}$. 设 $|BF_1|=3t$，则 $|AF_1|=5t$，

$|AB|=4t$，由双曲线定义可知 $|AF_2|=|AF_1|-2a=5t-2a$，

$|BF_2|=|BF_1|-2a=3t-2a$，$\therefore 8t-4a=4t$，$\therefore t=a$，



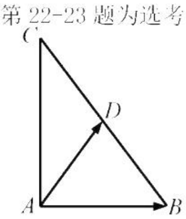
$\therefore |BF_1|=3a$，$|BF_2|=a$，$\because \angle ABF_1=\frac{\pi}{2}$，$\therefore 2c=|F_1F_2|=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故选B.

第Ⅱ卷（非选择题 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22-23 题为选考题，学生根据要求作答.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$A=90°$，$AB=2$，D 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$ __2__.



解：如图，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAB=|\overrightarrow{AB}|\times\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=2$.

14. $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $a\sin A=(c-b)\sin C+b\sin B$，$bc=6$，则

$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

解：由 $a\sin A=(c-b)\sin C+b\sin B$ 及正弦定理，得 $a^2=c^2-bc+b^2$，$\therefore b^2+c^2-a^2=bc$，

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

15. 已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$（$a\in\mathbf{R}$）有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1=2x_2$，则 $a=\frac{1}{\ln 2}$.

解：$\because f'(x)=e^x-2ax$，$\therefore x_1,x_2$ 是 $f'(x)$ 的两个零点，即是方程 $e^x-2ax=0$ 的两个不相等的实数根，

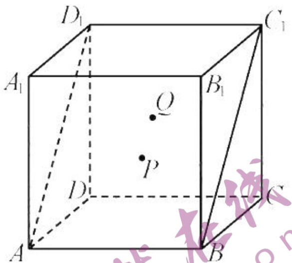
$\because x_1,x_2\neq 0$，$\therefore x_1,x_2$ 是方程 $2a=\frac{e^x}{x}$ 的两个不相等的实数根.

令 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，当 $x<0$ 或 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x<0$ 时，$g(x)<0$；当 $x>0$ 时，$g(x)>0$.

$\therefore 2a>g(1)=e$，且 $x_1,x_2>0$.

由 $x_1=2x_2$，得 $\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{e^{2x_2}}{2x_2}=\frac{e^{x_2}}{x_2}$，$\therefore e^{x_2}=2$，$x_2=\ln 2$，由 $2a=\frac{e^{x_2}}{x_2}=\frac{2}{\ln 2}$，即 $a=\frac{1}{\ln 2}$.

16. 如图，棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P,Q 为四边形 ABC_1D_1 内的点(包括边界)，且点 P 到 AB 的距离等于到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离，点 Q 到 C_1D_1 的距离等于到平面 $ABCD$ 的距离，则 $|PQ|$ 的最小值为$6\sqrt{2}-8$.



解：当 P,Q 在线段 BC_1 上时，由 P 到 AB 的距离等于到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离知，P 到点 B 的距离等于到 B_1C_1 的距离，故点 P 在以 B 为焦点，B_1C_1 为准线的抛物线上；同理，点 Q 在以 C_1 为焦点，BC 为准线的抛物线上. 设这两条抛物线与 BC_1 的交点即分别为点 P_0,Q_0（如图 1）.

则 P,Q 的轨迹分别为四边形 ABC_1D_1 内过点 P_0,Q_0 且平行于 AB 的线段(如图 2). 则 $|PQ|$ 的最小值即为 $|P_0Q_0|$.

如图 3 所示，建立平面直角坐标系，则 C_1 的坐标为 $(1,1)$，$l_{BC}:x=-1$，Q_0 所在的抛物线方程为 $(x-1)^2=4y,x\in[-1,1]$，联立方程 $\begin{cases}(x-1)^2=4y\\ y=x\end{cases}$ 且 $x\in[-1,1]$，得 $x=3-2\sqrt{2}$，

$|OQ_0|=\sqrt{2}x=\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})=3\sqrt{2}-4$，$\therefore |P_0Q_0|=2|OQ_0|=6\sqrt{2}-8$，即 $|PQ|$ 的最小值为 $6\sqrt{2}-8$.

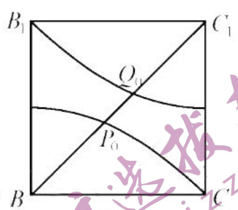


图 1

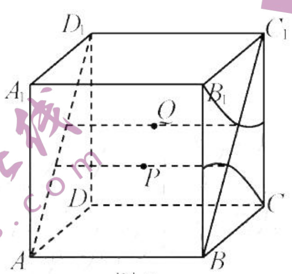


图 2

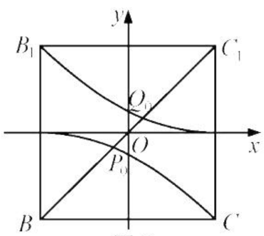


图 3

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n+S_{n-1}S_n=0$（$n\ge 2$）.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{(2n+1)a_n^2\}$的前n项和.

解：(1)当$n=1$时，$a_1=\frac{1}{2}$，

当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，$\therefore S_n-S_{n-1}+S_{n-1}S_n=0$，即$S_{n-1}-S_n=S_{n-1}S_n$ ………1分

$\because S_{n-1}S_n\ne 0$，$\therefore \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=1$ ………2分

$\therefore\{\frac{1}{S_n}\}$是首项为2，公差为1的等差数列………3分

$\therefore \frac{1}{S_n}=2+(n-1)\times 1=n+1$，$S_n=\frac{1}{n+1}$ ………4分

$\therefore a_n=-S_{n-1}S_n=-\frac{1}{n(n+1)}$ ………5分

综上，$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=1.\\ -\frac{1}{n(n+1)}, & n\ge 2.\end{cases}$ ………6分

(2)$\because a_n^2=\frac{1}{n^2(n+1)^2}$ ………7分

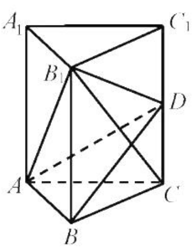
$\therefore (2n+1)a_n^2=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$ ………9分

记数列$\{(2n+1)a_n^2\}$的前n项和为T_n，

$\therefore T_n=(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})+(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})+\cdots+[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}]+[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ ………12分

18.（本小题满分12分）

直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp BC$，D为CC_1的中点，$BB_1=\sqrt{2}BC$.



(1)求证：平面$AB_1C\perp$平面ABD；

(2)若$AB=BD=\sqrt{3}$，求三棱锥B_1-ABD的体积.

解：(1)$\because ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，$\therefore AB\perp BB_1$，

又$\because AB\perp BC$，$BC\cap BB_1=B$，$\therefore AB\perp$平面BB_1C_1C ………1分

$\because B_1C\subset$平面BB_1C_1C，$\therefore B_1C\perp AB$ ①………2分

设$BC=t$，则$BB_1=\sqrt{2}t$，$\tan\angle BB_1C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$CD=\frac{1}{2}CC_1=\frac{\sqrt{2}t}{2}$，$\tan\angle CBD=\frac{CD}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle BB_1C=\angle CBD$ ………3分

6

$\because \angle BB_1C+\angle B_1CB=90^\circ$，$\therefore \angle CBD+\angle B_1CB=90^\circ$，故 $B_1C\perp BD$ ②………4 分

由①②，且 $AB\cap BD=B$，知 $B_1C\perp$ 平面 ABD………5 分

又 $\because B_1C\subset$ 平面 AB_1C，$\therefore$ 平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABD………6 分

(2) 由 $BC^2+CD^2=BD^2$，得 $t^2+\frac{t^2}{2}=3$，解得 $t=\sqrt{2}$………8 分

$\therefore \triangle BB_1D$ 的面积 $S_{\triangle BB_1D}=\frac{1}{2}BB_1\cdot BC=\sqrt{2}$………9 分

由(1)知 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore$ 三棱锥 $A-BB_1D$ 的体积 $V_{A-BB_1D}=\frac{1}{3}S_{\triangle BB_1D}\cdot AB=\frac{\sqrt{6}}{3}$………11 分

$\therefore$ 三棱锥 B_1-ABD 的体积 $V_{B_1-ABD}=V_{A-BB_1D}=\frac{\sqrt{6}}{3}$………12 分

19.（本小题满分 12 分）

2023 年，国家不断加大对科技创新的支持力度，极大鼓舞了企业投入研发的信心，增强了企业的创新动能。某企业在国家一系列优惠政策的大力扶持下，通过技术革新和能力提升，极大提升了企业的影响力和市场知名度，订单数量节节攀升，右表为该企业今年 $1\sim4$ 月份接到的订单数量.

月份 t	1	2	3	4
订单数量 y（万件）	5.2	5.3	5.7	5.8

(1) 试根据样本相关系数 r 的值判断订单数量 y 与月份 t 的线性相关性强弱（$0.75\le |r|\le 1$，则认为 y 与 t 的线性相关性较强，$|r|<0.75$，则认为 y 与 t 的线性相关性较弱）.（结果保留两位小数）

(2) 建立 y 关于 t 的线性回归方程，并预测该企业 5 月份接到的订单数量.

附：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$，$\sqrt{1.3}\approx 1.14$.

解：(1) $\bar{t}=\frac{1+2+3+4}{4}=2.5$，$\bar{y}=\frac{1}{4}(5.2+5.3+5.7+5.8)=5.5$………2 分

$\sum_{i=1}^{4}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=(-1.5)\times(-0.3)+(-0.5)\times(-0.2)+0.5\times0.2+1.5\times0.3=1.1$………3 分

7

$\sum_{i=1}^{4}(t_i-\bar{t})^2=(-1.5)^2+(-0.5)^2+0.5^2+1.5^2=5$，

$\sum_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2=(-0.3)^2+(-0.2)^2+0.2^2+0.3^2=0.26$ ………4 分

$\therefore r=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{1.1}{\sqrt{1.3}}\approx\dfrac{1.1}{1.14}\approx 0.96>0.75$ ………5 分

$\therefore$ 订单数量 y 与月份 t 的线性相关性较强………6 分

(2) $\because \hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{4}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{1.1}{5}=0.22$ ………8 分

$\therefore \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=5.5-0.22\times 2.5=4.95$ ………9 分

$\therefore$ 线性回归方程为 $\hat{y}=0.22t+4.95$ ………10 分

令 $t=5$，$\hat{y}=0.22\times 5+4.95=6.05$（万件）………11 分

即该企业 5 月份接到的订单数量预计为 6.05 万件………12 分

20.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $E:y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，A,B 为 E 上两点，且点 A 的纵坐标为 $\sqrt{6}$，F 恰好是 $\triangle AOB$ 的重心.

(1) 求 E 的方程；

(2) 若 $N(1,2)$，P,Q 为抛物线上相异的两个动点，且 $NP\perp NQ$，求 $|PF|+|QF|$ 的最小值.

解：(1) 由已知可得 $A(\dfrac{3}{p},\sqrt{6})$，$F(\dfrac{p}{2},0)$，设 $B(x_0,y_0)$ ………1 分

$\because F$ 恰好是 $\triangle AOB$ 的重心，$\therefore \begin{cases}\dfrac{x_0+\dfrac{3}{p}}{3}=\dfrac{p}{2}\\ \dfrac{y_0+\sqrt{6}}{3}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{3p}{2}-\dfrac{3}{p}\\ y_0=-\sqrt{6}\end{cases}$ ………2 分

将 $y_0=-\sqrt{6}$ 代入 $y^2=2px$，得 $x_0=\dfrac{3}{p}$，$\therefore \dfrac{3}{p}=\dfrac{3p}{2}-\dfrac{3}{p}$，解得 $p=2$ ……… 3 分

$\therefore E$ 的方程为 $y^2=4x$ ………4 分

(2) 设直线 PQ 的方程为 $x=my+n$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由方程组 $\begin{cases}x=my+n\\ y^2=4x\end{cases}$，得 $y^2-4my-4n=0$ ………5 分

$\therefore \Delta=(-4m)^2+16n>0$，即 $m^2+n>0$，且 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$ ………6 分

$\therefore x_1+x_2=(my_1+n)+(my_2+n)=m(y_1+y_2)+2n=4m^2+2n$，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{4}\cdot\dfrac{y_2^2}{4}=n^2$ ………7 分

$\because NP\perp NQ$，$\therefore \overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$，

$\therefore (x_1-1,y_1-2)\cdot(x_2-1,y_2-2)=0$，即 $(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-2)(y_2-2)=0$，

$\therefore x_1x_2-(x_1+x_2)+y_1y_2-2(y_1+y_2)+5=0$ ………8 分

$\therefore n^2-(4m^2+2n)-4n-8m+5=0$，$\therefore (n-3)^2=(2m+2)^2$，$\therefore n=2m+5$ 或 $n=-2m+1$ ………9 分

若 $n=-2m+1$，直线 PQ 过 N 点，不合题意，舍去，

$\therefore n=2m+5$，此时 $\Delta>0$，$x_1+x_2=4m^2+4m+10$ ………10 分

则 $|PF|+|QF|=x_1+x_2+2=4m^2+4m+12=4(m+\dfrac{1}{2})^2+11$ ………11 分

$\therefore$ 当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时，$|PF|+|QF|$ 有最小值为 11 ………12 分

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{ax-1}$（$a<0$）在 $x=1$ 处的切线斜率为 $-\dfrac{e}{4}$.

(1) 求 a 的值；

(2) 若 $x\ge 1$，$f(x-1)\le \ln x-m(x-1)-1$，求实数 m 的取值范围.

解：(1) $\because f'(x)=\dfrac{e^x(ax-1-a)}{(ax-1)^2}$ ………1 分

$\therefore f'(1)=-\dfrac{e}{(a-1)^2}=-\dfrac{e}{4}$ ………2 分

$\therefore (a-1)^2=4$，$\because a<0$，$\therefore a-1=-2$，$a=-1$ ………3 分

(2) $f(x)=-\dfrac{e^x}{x+1}$，$f(x-1)=-\dfrac{e^{x-1}}{x}$ ………4 分

由 $f(x-1)\le \ln x-m(x-1)-1$，得 $\frac{e^{x-1}}{x}-m(x-1)+\ln x-1\ge 0$ ………5 分

令 $g(x)=\frac{e^{x-1}}{x}-m(x-1)+\ln x-1$（$x\ge 1$），则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}+\frac{1}{x}-m$，

$\because g(x)\ge 0$，且 $g(1)=0$，$\therefore$ 存在 $x_0>1$，使得当 $x\in[1,x_0)$ 时，$g'(x)\ge 0$ ………6 分

$\therefore g'(1)=1-m\ge 0$，即 $m\le 1$ ………7 分

下面证明当 $m\le 1$ 时，$g(x)\ge 0$ ………8 分

$\because g(x)\ge \frac{e^{x-1}}{x}-(x-1)+\ln x-1=\frac{e^{x-1}}{x}-x+\ln x$，且 $\frac{e^{x-1}}{x}=e^{x-1-\ln x}$，$\therefore g(x)\ge e^{x-1-\ln x}-x+\ln x$

………9 分

设 $F(x)=e^x-x-1$，$\therefore F'(x)=e^x-1$，可知 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(x)\ge F(0)=0$，$\therefore e^x\ge x+1$，$\therefore e^{x-1-\ln x}\ge x-\ln x$ ………10 分

$\therefore g(x)\ge x-\ln x-x+\ln x=0$ ………11 分

综上，实数 m 的取值范围为 $(-\infty,1]$ ………12 分

请考生在第 22-23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

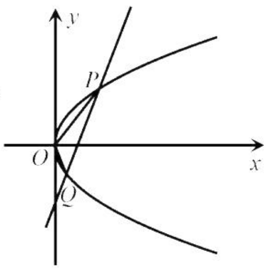
22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2t^2\\ y=2t\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\alpha-\theta)=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$，其中 α 为倾斜角，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3})$.

(1) 求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

(2) 设 l 与曲线 C 相交于 P,Q 两点，直线 OP,OQ 的斜率为 k_1,k_2，求 k_1+k_2 的取值范围.

解：(1) 曲线 C 的普通方程为 $y^2=2x$ ………2 分



由 $\rho\sin(\alpha-\theta)=\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$，得 $\rho\sin\alpha\cos\theta-\rho\cos\alpha\sin\theta=\sin\alpha-\cos\alpha$，

即 $x\sin\alpha-y\cos\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha$，即 $y=k(x-1)+1$（$k\in(1,\sqrt{3})$）………4 分

(2) 设 $P(2t_1^2,2t_1)$，$Q(2t_2^2,2t_2)$，

将 $\begin{cases}x=2t^2\\ y=2t\end{cases}$ 代入直线 l 方程中，得 $2kt^2-2t+1-k=0$ ………5 分

则 $t_1+t_2=\frac{1}{k}$，$t_1t_2=\frac{1-k}{2k}$ ………7 分

$\therefore k_1+k_2=\frac{2t_1}{2t_1^2}+\frac{2t_2}{2t_2^2}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\frac{2}{1-k}$ ………8 分

$\because k\in(1,\sqrt{3})$，$\therefore k_1+k_2\in(-\infty,-\sqrt{3}-1)$ ………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

设 a,b,c 均为正数，已知函数 $f(x)=|x-a|+|x+b|+c$ 的最小值为 4.

(1) 求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值；

(2) 证明：$\dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq 8$.

解：(1) $\because f(x)=|x-a|+|x+b|+c\geq|(x-a)-(x+b)|+c=|a+b|+c=a+b+c$ ………1 分

$\because f_{\min}(x)=4$，$\therefore a+b+c=4$ ………2 分

$\because a^2+b^2\geq 2ab$，$a^2+c^2\geq 2ac$，$b^2+c^2\geq 2bc$，$\therefore 2(a^2+b^2+c^2)\geq 2ab+2bc+2ac$ ………3 分

$\therefore 3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2=16$ ………4 分

即 $a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{16}{3}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号，故 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为 $\dfrac{16}{3}$ ………5 分

(2) $\because\dfrac{a^2+b^2}{c}\geq\dfrac{2ab}{c}$，$\dfrac{b^2+c^2}{a}\geq\dfrac{2bc}{a}$，$\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq\dfrac{2ac}{b}$ ………6 分

$\therefore\dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq\dfrac{2ab}{c}+\dfrac{2bc}{a}+\dfrac{2ac}{b}$ ………7 分

又 $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}=b(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a})\geq 2b\sqrt{\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{c}{a}}=2b$，同理 $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{ac}{b}\geq 2a$，$\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\geq 2c$ ………8 分

$\therefore\dfrac{2ab}{c}+\dfrac{2bc}{a}+\dfrac{2ac}{b}\geq 2(a+b+c)=8$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立………9 分

即 $\dfrac{a^2+b^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2}{b}\geq 8$ ………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。