

鄂东南省级示范高中教育教学改革联盟学校 2023 年五月模拟考
高三数学试卷

命题学校：黄冈中学 命题教师：肖海东 冯小玮 周建义

审题学校：大冶一中 审题教师：江 猛

考试时间：2023 年 5 月 10 日下午 15:00-17:00 试卷满分：150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，集合 $B = \{x | y = \ln(x+1)\}$ ，则

- A. $A \subseteq \complement_U B$ B. $\complement_U A \subseteq B$ C. $(\complement_U A) \cup B = U$ D. $A \cup B = U$

2. 已知 $2-i$ (i 是虚数单位) 是关于 x 的方程 $x^2 + bx + c = 0$ ($b, c \in \mathbf{R}$) 的一个根，则 $b+c =$

- A. 9 B. 1 C. -7 D. $2i-5$

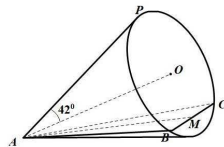
3. 已知向量 $|\vec{a}|=2$ ， $|\vec{b}|=1$ ，且 $|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{10}$ ，则 \vec{b} 在 \vec{a} 方向上的投影向量为

- A. $\frac{1}{4}\vec{a}$ B. $-\frac{1}{4}\vec{a}$ C. $\frac{1}{8}\vec{a}$ D. $-\frac{1}{8}\vec{a}$

4. 函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，若函数 $g(x)$ 是偶函数，则 $\tan \varphi =$

- A. $-\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 用数学的眼光观察世界，神奇的彩虹角约为 42° 。如图，眼睛与彩虹之间可以抽象为一个圆锥，设 AO 是眼睛与彩虹中心的连线， AP 是眼睛与彩虹最高点的连线，则称 $\angle OAP$ 为彩虹角。若平面 ABC 为水平面， BC 为彩虹面与水平面的交线， M 为 BC 的中点， $BC = 1200$ 米， $AM = 800$ 米，则彩虹 (\widehat{BPC}) 的长度约为



(参考数据： $\sin 42^\circ \approx 0.67$ ， $\sin 1.1 \approx \frac{60}{67}$)

- A. $(1340\pi - 1474)$ 米 B. $(1340\pi - 670)$ 米
C. $(2000\pi - 1474)$ 米 D. $(2000\pi - 670)$ 米
6. 6 名同学相约在周末参加创建全国文明城市志愿活动，现有交通值守、文明劝导、文艺宣讲三种岗位需要志愿者，其中，交通值守、文明劝导岗位各需 2 人，文艺宣讲岗位需 1 人。已知这 6 名同学中有 4 名男生，2 名女生，现要从这 6 名同学中选出 5 人上岗，剩下 1 人留守值班。若两名女生都已经到岗，则她们不在同一岗位的概率为
- A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{4}{5}$

鄂东南教改联盟学校 2023 年春五月模拟考 高三数学试卷 (共 4 页) 第 1 页

7. 设 $\min\{m, n\}$ 表示 m, n 中的较小数。若函数 $f(x) = \min\{|x| - 1, 2x^2 - ax + a + 6\}$ 至少有 3 个零点，

则实数 a 的取值范围是

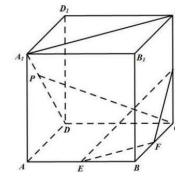
- A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, -4] \cup (12, +\infty)$
C. $(-\infty, -4) \cup [12, +\infty)$ D. $(-\infty, -4)$

8. 现有一个底面边长为 $2\sqrt{3}$ ，侧棱长为 $2\sqrt{2}$ 的正三棱锥框架，其各顶点都在球 O_1 的球面上。将一个圆气球 O_2 放在此框架内，再向气球内充气，当圆气球恰好与此正三棱锥各棱都相切时停止充气，此时两球表面积之和为

- A. 23π B. $(60 - 16\sqrt{6})\pi$ C. $(60 + 16\sqrt{6})\pi$ D. $(22 - 2\sqrt{5})\pi$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F, G 分别为 AB, BC, CC_1 的中点，点 P 在线段 A_1D 上，则下列结论正确的是



- A. 直线 $A_1C_1 \parallel$ 平面 EFG
B. 直线 CP 和平面 $ABCD$ 所成的角为定值
C. 异面直线 CP 和 FG 所成的角不为定值
D. 若直线 $CP \parallel$ 平面 EFG ，则点 P 为线段 A_1D 的中点

10. 已知 $a > 1, b > 1, \frac{a}{a-1} = 2^a, \frac{b}{b-1} = \log_2 b$ ，则以下结论正确的是

- A. $a + 2^a = b + \log_2 b$ B. $\frac{1}{2^a} + \frac{1}{\log_2 b} = 1$
C. $a - b < -2$ D. $a + b > 4$

11. 双曲线具有如下光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点。由此可得，过双曲线上任意一点的切线平分该点与两焦点连线的夹角。已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点，过 C 右支上一点 $A(x_0, y_0)$

$(x_0 > 1)$ 作直线 l 交 x 轴于点 $M(\frac{1}{x_0}, 0)$ ，交 y 轴于点 N ，则

- A. C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$
B. $\angle F_1AM = \angle F_2AM$
C. 过点 F_1 作 $F_1H \perp AM$ ，垂足为 H ，则 $|OH| = \frac{3}{2}$
D. 四边形 AF_1NF_2 面积的最小值为 $4\sqrt{5}$

鄂东南教改联盟学校 2023 年春五月模拟考 高三数学试卷 (共 4 页) 第 2 页

12. 已知函数 $f_n(x) = \sin^{2n}x + \cos^{2n}x (n \in \mathbf{N}^*)$, 记 $f_n(x)$ 的最小值为 a_n , 下列说法正确的是

- A. 对任意的正整数 n , $f_n(x)$ 的图象都关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
 B. $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{7}{8}$
 C. $\sum_{i=1}^n \ln(1 + a_i) < 2$
 D. 设 $b_n = \sqrt{n} \cdot a_n$, S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_n < 2\sqrt{2} - 4b_{n+2}$

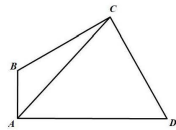
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 某工厂生产一批零件 (单位: cm), 其尺寸 ξ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 且 $P(\xi \leq 14) = 0.1$, $P(\xi < 18) = 0.9$, 则 $\mu =$ _____.
14. 已知直线 $y = kx$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 相交于 A, B 两点. 若 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 则 k 的值为 _____.
15. 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, 直线 l_1, l_2 是 $f(x)$ 的两条切线, l_1, l_2 相交于点 Q , 若 $l_1 \perp l_2$, 则 Q 点横坐标的取值范围是 _____.
16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A, B 是椭圆 C 上的两点, 且直线 OA, OB 的斜率满足 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{1}{4}$, 延长 OA 到点 M , 使得 $|OM| = 3|OA|$, 且直线 MB 交椭圆 C 于 N 点, 设 $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$, 则 $\lambda^2 + \mu^2 =$ _____; $\frac{|MN|}{|BN|} =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB \perp AD$, $\angle ABC = \frac{2}{3}\pi$, $AB = 1$.

- (1) 若 $AC = \sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;
 (2) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, $CD = 2\sqrt{3}$, 求 $\tan \angle CAD$.

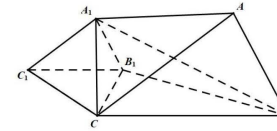


18. (12 分) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n^2 + 2a_n - n = 2S_n$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 设 $b_n = 3^{a_n} - 1$, 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \frac{b_n + 1}{b_n \cdot b_{n+1}}$, 求证: $c_1 + c_2 + \dots + c_n < \frac{1}{4}$.

19. (12 分) 如图, 在三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $A_1C \perp$ 平面 BB_1C_1C .

- (1) 证明: 平面 $A_1B_1C \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$;
 (2) 若 $A_1C = B_1C$, $A_1B_1 = B_1C_1 = 2\sqrt{2}$, $AB = BC = 4\sqrt{2}$, 求平面 AA_1B 与平面 CA_1B 夹角的余弦值.



20. (12 分) 2023 年中央一号文件指出, 民族要复兴, 乡村要振兴. 为助力乡村振兴, 某电商平台准备为某地的农副产品开设直播带货专场. 直播前, 此平台用不同的单价试销, 并在购买的顾客中进行体验调查问卷. 为了回馈 100 名热心参与问卷的顾客, 此平台决定在直播中专门为他们设置两次抽奖活动, 每次抽奖都是由系统独立、随机地从这 100 名顾客中抽取 20 名顾客, 抽中顾客会有礼品赠送, 若直播时这 100 名顾客都在线, 记两次抽中的顾客总人数为 X (不重复计数).

(1) 若甲是这 100 名顾客中的一人, 求甲被抽中的概率;
 (2) 求使 $P(X = k)$ 取得最大值的整数 k .

21. (12 分) 已知动圆过点 $F(0,1)$, 且与直线 $l: y = -1$ 相切, 设动圆圆心 D 的轨迹为曲线 C .

- (1) 求曲线 C 的方程;
 (2) 过 l 上一点 P 作曲线 C 的两条切线 PA, PB , A, B 为切点, PA, PB 与 x 轴分别交于 M, N 两点. 记 $\triangle AFM, \triangle PMN, \triangle PFN$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 .
 (i) 证明: 四边形 $FNPM$ 为平行四边形;
 (ii) 求 $\frac{S_2^2}{S_1 S_3}$ 的值.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x + x - 1$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}$, 其中 $a > 0$, e 是自然对数的底数.

- (1) 若 $f(x) \geq g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围;
 (2) 设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 在 (1) 的条件下, 讨论关于 x 的方程 $h(f(x)) = h(g(x))$ 在 $(0, +\infty)$ 上解的个数.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



 微信搜一搜

 自主选拔在线