高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $(1+i)^2z=3+4i$，则 $\bar{z}=$

A. $2+\frac{3}{2}i$　　B. $-2+\frac{3}{2}i$　　C. $2-\frac{3}{2}i$　　D. $-2-\frac{3}{2}i$

2. 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-9x-10<0\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|(x-1)(8-x)\geqslant0\}$，$B=\{1,2,4,5,7,8\}$，则 $\complement_U(A\cap B)=$

A. $\{1,2,4,5,7\}$　　B. $\{0,3,6\}$

C. $\{0,2,8,9\}$　　D. $\{0,3,6,9\}$

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 的顶点为 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与圆 $x^2+y^2=9$ 相交于点 $\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},t\right)$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=$

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

5. 将半径为 6 的半圆卷成一个无底圆锥（衔接处不重合），则该无底圆锥的体积为

A. $27\sqrt{3}\pi$　　B. 27π

C. $9\sqrt{3}\pi$　　D. 9π

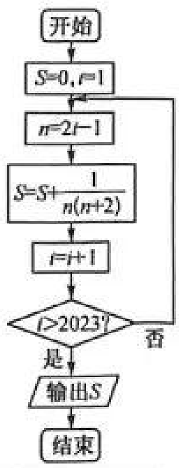
6. 执行如图所示的程序框图，则输出的 $S=$

A. $\frac{2023}{4045}$

B. $\frac{2022}{4047}$

C. $\frac{2023}{4047}$

D. $\frac{2022}{4045}$



7. 纯电动汽车是以车载电源为动力，用电机驱动车轮行驶，符合道路交通、安全法规各项要求的车辆，它使用存储在电池中的电来发动. 因其对环境影响较小，逐渐成为当今世界的乘用车的发展方向. 研究发现电池的容量随放电电流的大小而改变，1898 年 Peukert 提出铅酸电池的容量 C、放电时间 t 和放电电流 I 之间关系的经验公式：$C=I^{\lambda}t$，其中 λ 为与蓄电池结构有关的常数(称为 Peukert 常数)，在电池容量不变的条件下，当放电电流为 15 A 时，放电时间为 30 h；当放电电流为 50 A 时，放电时间为 7.5 h，则该蓄电池的 Peukert 常数 λ 约为(参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$)

A. 1.12　　　　B. 1.13

C. 1.14　　　　D. 1.15

8. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $c=2$，$b=\sqrt{7}$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，P 为△ABC 内一点，$AP\perp BP$ 且 $\angle BPC=\frac{2\pi}{3}$，则 $BP=$

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. 5

9. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=2px\,(p>0)$ 的焦点，过点 F 且斜率为 2 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，若 $|AF|\cdot|BF|=20$，则 $p=$

A. 4　　　　B. 3　　　　C. 2　　　　D. 1

10. 已知函数 $f(x)=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}$，则下列结论错误的是

A. π 为 $f(x)$ 的一个周期　　　　B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

C. $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为增函数　　　　D. $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2},2]$

11. 设双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，离心率为 e，且 $a,c,a+c$ 成等比数列，A 是 E 的一个顶点，F 是与 A 不在 y 轴同侧的焦点，B 是 E 的虚轴的一个端点，PQ 为 E 的任意一条不过原点且斜率为 $k\,(k\neq 0)$ 的弦，M 为 PQ 中点，O 为坐标原点，则下列判断错误的是

A. E 的一条渐近线的斜率为 $\sqrt{e}$

B. $AB\perp BF$

C. $k_{OM}\cdot k_{PQ}=e$(k_{OM},k_{PQ} 分别为直线 OM,PQ 的斜率)

D. 若 $OP\perp OQ$，则 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=e$ 恒成立

12. 若 $0<b<a<\frac{\pi}{2}$，则

A. $be^a-e^b<ae^b-e^a$　　　　B. $e^b+\frac{1}{e^a}+2a>e^a+\frac{1}{e^b}+2b$

C. $a\sin b+b<b\sin a+a$　　　　D. $\sin b\cos a>\sin a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 3,\\2x+y\leqslant 6,\\x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的取值范围为________.

14. 已知直线 $l:x\cos\theta+y\sin\theta=2$ 与圆 $C:(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 相切，则满足条件的直线 l 的条数为________.

15. 已知函数 $f(x)=a^x+3x+1\,(a>0$ 且 $a\neq 1)$，若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直，则函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为________.

16. 在正三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=6$，$PA=4\sqrt{3}$，若球 O 与三棱锥 $P-ABC$ 的六条棱均相切，则球 O 的表面积为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.(本小题满分 12 分)

在数列$\{a_n\}$中，$a_2=1, a_5=2, a_n\geqslant 0$，且对$\forall n\in \mathbf{N}^*$，$a_n^2+a_{n+2}^2=2a_{n+1}^2$恒成立.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}(a_{n+1}+a_{n+2})}$，若数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求证：$S_n<1$.

18.(本小题满分 12 分)

2023 年春节期间，科幻电影《流浪地球 2》上映，获得较好的评价，也取得了很好的票房成绩. 某平台为了解观众对该影片的评价情况(评价结果仅有"好评""差评")，从平台所有参与评价的观众中随机抽取 400 人进行调查，数据如下表所示(单位：人)：

	好评	差评	合计
男性		80	200
女性	90		
合计			400

(1)把 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 99.5%的把握认为"对该部影片的评价与性别有关"?

(2)从随机抽取的 400 人中所有给出"好评"的观众中采用按男女分层抽样的方法随机抽取 7 人参加平台和影片出品方组织的活动，为了方便活动，现从 7 人中随机选出 2 人作为正、副领队，求所选出的正、副领队是一男一女的概率.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

参考数据：

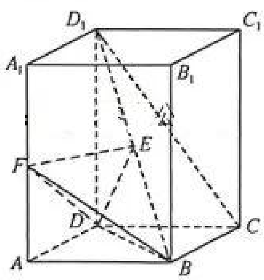
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.(本小题满分 12 分)

在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，四边形$ABCD$为平行四边形，平面$D_1BC\perp$平面D_1BD.

(1)求证：$BC\perp BD$；

(2)若$AA_1=2BD=2BC=4$，E，F分别为BD_1，AA_1的中点，求E到平面BDF的距离.



20.(本小题满分 12 分)

已知 F 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点,M 为右顶点,N 为上顶点,离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$,直线 l 与 C 相切于点 A,与 y 轴相交于点 B(异于点 A),$|OA|=|OB|$(O 为坐标原点),且△OAB 的面积为$\sqrt{3}$.

(1)求$\frac{|NF|}{|MN|}$;

(2)求 C 的方程.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2$.

(1)若 $a=-\frac{1}{2}$,求 $f(x)$的极值;

(2)若 $f(x)$在区间$[1,e]$上有两个零点,求实数 a 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2-t^2,\\ y=3t\end{cases}$($t$ 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta-2\sin\theta)-3=0$.

(1)求 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程;

(2)已知点 $P(3,0)$,l 与 C 交于 A,B 两点,求$\frac{|PA|}{|PB|}+\frac{|PB|}{|PA|}$的值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知 a,b,c 均为正数,且 $2a+b+c=1$.

证明:(1)若 $b=c$,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 8$;

(2)$2ab+2ac+bc\leqslant\frac{1}{3}$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. A 由$(1+i)^2z=3+4i$,得$z=\frac{3+4i}{(1+i)^2}=\frac{3+4i}{2i}=\frac{(3+4i)\times(-i)}{2}=\frac{4-3i}{2}=2-\frac{3}{2}i$,所以$\bar{z}=2+\frac{3}{2}i$. 故选 A.

2. D 由题意知$U=\{x\in\mathbf{Z}|-1<x<10\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$A=\{x\in\mathbf{Z}|1\leqslant x\leqslant 8\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,所以$A\cap B=\{1,2,4,5,7,8\}$,$\complement_U(A\cap B)=\{0,3,6,9\}$. 故选 D.

3. B 因为α的终边与圆$x^2+y^2=9$相交于点$\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},t\right)$,所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$. 故选 B.

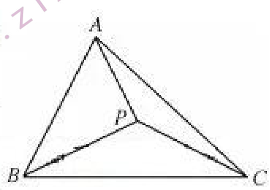
4. B 因为$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$,所以$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=7$,因为$|\boldsymbol{a}|=2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,所以$|\boldsymbol{b}|=1$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2}$,又$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

5. C 由题意知所卷成的无底圆锥母线长为 6,设该无底圆锥的底面半径为r,高为h,则$2\pi r=6\pi$,所以$r=3$,所以$h=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$,所以$V=\frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}\pi$. 故选 C.

6. C 由框图知,执行该程序后输出的S为$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{4\,045\times 4\,047}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4\,045}-\frac{1}{4\,047}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4\,047}\right)=\frac{2\,023}{4\,047}$. 故选 C.

7. D 由题意知$C=15^\lambda\times 30=50^\lambda\times 7.5$,所以$\left(\frac{50}{15}\right)^\lambda=\frac{30}{7.5}=4$,两边取以 10 为底的对数,得$\lambda\lg\frac{10}{3}=2\lg 2$,所以$\lambda=\frac{2\lg 2}{1-\lg 3}\approx\frac{2\times 0.301}{1-0.477}\approx 1.15$. 故选 D.

8. B 在$\triangle ABC$中,由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC$,即$7=a^2+4-2a$,解得$a=3$,在$\text{Rt}\triangle ABP$中,令$\angle ABP=\theta$,则$BP=2\cos\theta$,在$\triangle BPC$中,$\angle CBP=\frac{\pi}{3}-\theta$,$\angle BCP=\pi-\frac{2\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\theta$,由正弦定理得$\frac{a}{\sin\angle BPC}=\frac{BP}{\sin\angle BCP}$,即$\frac{3}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$,所以$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,又$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$,所以$BP=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$. 故选 B.



9. A 法一:由题意知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,故$l$的方程为$x=\frac{1}{2}y+\frac{p}{2}$,与$C$的方程联立,得$y^2-py-p^2=0$,显然$\Delta>0$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=p$,$y_1y_2=-p^2$,所以$x_1+x_2=\frac{1}{2}(y_1+y_2)+p=\frac{3p}{2}$,$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$,又$|AF|=\frac{p}{2}+x_1$,$|BF|=\frac{p}{2}+x_2$,所以$|AF|\cdot|BF|=\left(\frac{p}{2}+x_1\right)\left(\frac{p}{2}+x_2\right)=\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}$ $\frac{5p^2}{4}=20$,所以$p=4$. 故选 A.

法二：由题意得直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{5}t, \\ y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t \end{cases}$（$t$ 为参数），代入 $y^2=2px$，整理得 $4t^2-2\sqrt{5}pt-5p^2=0$，显然 $\Delta>0$，

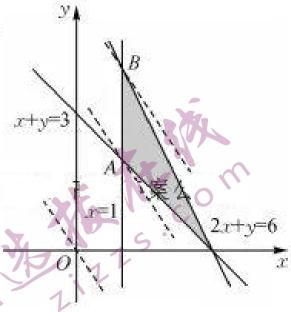
设该方程的两根为 t_1,t_2，则 $|AF|\cdot|BF|=|t_1t_2|=\dfrac{5p^2}{4}=20$，所以 $p=4$. 故选 A.

10. C　因为 $f(x+\pi)=\sqrt{1+\sin(x+\pi)}+\sqrt{1-\sin(x+\pi)}=\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1+\sin x}=f(x)$，所以 π 为 $f(x)$ 的一个周期，则 A 正确；因为 $f(\pi-x)=\sqrt{1+\sin(\pi-x)}+\sqrt{1-\sin(\pi-x)}=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，则 B 正确；当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$\dfrac{x}{2}\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $f(x)=\sqrt{\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}=\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}=2\cos\dfrac{x}{2}$，易知 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，则 C 错误；因为 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的取值范围为 $[\sqrt{2},2]$，因为 $f(x)$ 关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的取值范围为 $[\sqrt{2},2]$，又 $f(x)$ 的周期为 π，所以 $f(x)$ 在整个定义域上的值域为 $[\sqrt{2},2]$，则 D 正确. 故选 C.

11. D　因为 $a,c,a+c$ 成等比数列，所以 $c^2=ac+a^2$，所以 $b^2=ac$ 且 $e^2-e-1=0$，解得 $e=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（负根舍），所以 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2=\dfrac{ac}{a^2}=\dfrac{c}{a}=e$，所以 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{e}$，即 E 的一条渐近线的斜率为 $\sqrt{e}$，故 A 正确；不妨设 F 为左焦点，B 为虚轴的上端点，则 A 为右顶点，则 BF 的斜率 $k_{BF}=\dfrac{b}{c}$，AB 的斜率 $k_{AB}=-\dfrac{b}{a}$，所以 $k_{BF}\cdot k_{AB}=-\dfrac{b^2}{ac}=-1$，所以 $AB\perp BF$，故 B 正确；设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1, \\ \dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 作差后整理得 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_2+y_1}{x_2+x_1}=\dfrac{b^2}{a^2}$，即 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{b^2}{a^2}$，所以 $k_{PQ}\cdot k_{OM}=\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{c^2-a^2}{a^2}=\dfrac{ac}{a^2}=\dfrac{c}{a}=e$，故 C 正确；设直线 OP：$y=kx$，则直线 OQ：$y=-\dfrac{1}{k}x$，将 $y=kx$ 代入双曲线方程 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，得 $x^2=\dfrac{a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$，则 $y^2=\dfrac{a^2b^2k^2}{b^2-a^2k^2}$，$\therefore |OP|^2=x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2(k^2+1)}{b^2-a^2k^2}$，将 k 换成 $-\dfrac{1}{k}$ 得 $|OQ|^2=\dfrac{a^2b^2(k^2+1)}{b^2k^2-a^2}$，则 $\dfrac{1}{|OP|^2}+\dfrac{1}{|OQ|^2}=\dfrac{(b^2-a^2)(k^2+1)}{a^2b^2(k^2+1)}=\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2b^2}$ 与 b 的值有关，故 D 错误. 故选 D.

12. C　对于 A，令 $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ 且 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $f(a)>f(b)$，即 $\dfrac{e^a}{a+1}>\dfrac{e^b}{b+1}$，所以 $e^a(b+1)>e^b(a+1)$，即 $be^a-e^b>ae^b-e^a$，故 A 错误；对于 B，令 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}-2x$ 且 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}-2>2\sqrt{e^x\cdot\dfrac{1}{e^x}}-2=0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $f(a)>f(b)$，即 $e^b-\dfrac{1}{e^b}-2b<e^a-\dfrac{1}{e^a}-2a$，所以 $e^b+\dfrac{1}{e^a}+2a<e^a+\dfrac{1}{e^b}+2b$，故 B 错误；对于 C，令 $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{x}$ 且 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x+1}{x^2}>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $f(a)>f(b)$，即 $\dfrac{\sin a-1}{a}>\dfrac{\sin b-1}{b}$，所以 $b(\sin a-1)>a(\sin b-1)$，则 $a\sin b+b<b\sin a+a$，故 C 正确；对于 D，当 $b=\dfrac{\pi}{6}$，$a=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\sin b\cos a=\dfrac{1}{4}<\sin a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 错误. 故选 C.

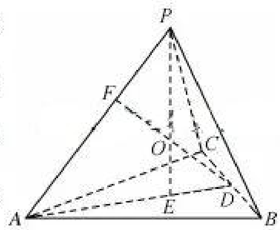
13. $[7,11]$　画出可行域(如图阴影部分)，移动直线 $l:3x+2y-z=0$，当 l 过 A 点时，z 取得最小值；当 l 过点 B 时，z 取得最大值，易求得 $A(1,2)$，$B(1,4)$，所以 $z_{\min}=7$，$z_{\max}=11$，故 z 的取值范围为 $[7,11]$.



14. 2　原点到 l 的距离 $d_1=\dfrac{|-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2$，$C$ 到 l 的距离为 4，故满足条件的 l 既与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，又与圆 C 相切，故 l 是圆 $x^2+y^2=4$ 和圆 C 的公切线，易知两圆相交，故公切线的条数为 2，即符合条件的直线 l 有 2 条.

15. $7+\dfrac{1}{e^2}$　$f'(x)=a^x\ln a+3$，所以 $f'(0)=\ln a+3$，因为切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直，所以切线斜率为 2，即 $\ln a+3=2$，解得 $a=e^{-1}$，所以 $f(x)=e^{-x}+3x+1$，则 $f'(x)=-e^{-x}+3$，显然 $f'(x)$ 是增函数，因为 $x\in[-1,2]$，所以 $f'(x)\geqslant f'(-1)=3-e>0$，故 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调递增，故 $f(x)_{\max}=f(2)=7+\dfrac{1}{e^2}$.

16. $(76-32\sqrt{3})\pi$　取 $\triangle ABC$ 的中心 E，连接 PE，则 $PE\perp$ 平面 ABC，且与棱均相切的球的球心 O 在 PE 上，连接 AE 并延长交 BC 于 D，则 D 为 BC 的中点，$AD\perp BC$，连接 OD，易证 $BC\perp OD$，过 O 作 $OF\perp PA$，交 PA 于点 F，设球 O 的半径为 r，则 $OD=OF=r$，由题意易求得 $AD=3\sqrt{3}$，$AE=2\sqrt{3}$，$ED=\sqrt{3}$，$PE=6$，所以 $\angle APE=30^\circ$，设 $OE=t(0<t<6)$，所以 $PO=2OF=2r$，因为 $r=\sqrt{t^2+3}$，所以 $t+2\sqrt{t^2+3}=6$，解得 $t=2\sqrt{3}-2$，所以 $r^2=(2\sqrt{3}-2)^2+3=19-8\sqrt{3}$，故球 O 的表面积为 $(76-32\sqrt{3})\pi$.



17. (1) 解：因为对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n^2+a_{n+2}^2=2a_{n+1}^2$，即 $a_{n+2}^2-a_{n+1}^2=a_{n+1}^2-a_n^2$，所以 $\{a_n^2\}$ 是等差数列. ………… 1 分

又 $a_2=1$，$a_5=2$，所以 $\{a_n^2\}$ 的公差 $d=\dfrac{a_5^2-a_2^2}{3}=\dfrac{4-1}{3}=1$， ………… 2 分

所以 $a_n^2=a_2^2+(n-2)d=1+n-2=n-1$， ………… 3 分

又 $a_n\geqslant 0$，所以 $a_n=\sqrt{n-1}$. ………… 4 分

(2) 证明：由(1)知 $a_n=\sqrt{n-1}$，所以 $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$， ………… 5 分

所以 $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$， ………… 8 分

所以 $S_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

$=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. ………… 11 分

因为 $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>0$，所以 $S_n<1$. ………… 12 分

18. 解:(1)2×2 列联表补充完整如下:

	好评	差评	合计
男性	120	80	200
女性	90	110	200
合计	210	190	400

…………………………………………………………………………………… 2 分

$K^2=\frac{400\times(120\times110-90\times80)^2}{210\times190\times200\times200}\approx9.023>7.879$,

因此有 99.5%的把握认为"对该部影片的评价与性别有关". …………………………………… 4 分

(2)采用分层抽样的方法从男性给出"好评"者中抽取的人数为 $120\times\frac{7}{210}=4$ 人,记作 a,b,c,d;

从女性给出"好评"者中抽取的人数为 $90\times\frac{7}{210}=3$ 人,记作 A,B,C. …………………………… 6 分

所以从 7 人中抽取 2 人包含的基本事件有 $ab,ac,ad,aA,aB,aC,bc,bd,bA,bB,bC,cd,cA,cB,cC,dA,dB,dC,AB,AC$,
BC,共 21 个. …………………………………………………………………………… 8 分

其中包含一男一女的基本事件有 $aA,aB,aC,bA,bB,bC,cA,cB,cC,dA,dB,dC$,共 12 个. ………………… 10 分

故所求概率 $P=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$. …………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明:由题意知 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$, $BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $DD_1\perp BC$. ……………………… 1 分

过 D 在平面 D_1BD 内作直线 $DG\perp D_1B$,交 D_1B 于点 G. …………………………………… 2 分

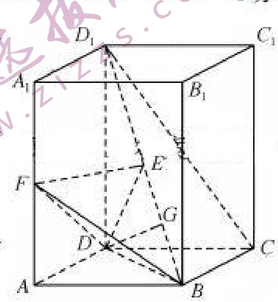
因为平面 $D_1BC\perp$ 平面 D_1BD,平面 $D_1BC\cap$ 平面 $D_1BD=D_1B$, $DG\subset$ 平面 D_1BD,

所以 $DG\perp$ 平面 D_1BC. ………………………………………………………………… 3 分

又 $BC\subset$ 平面 D_1BC,所以 $DG\perp BC$. …………………………………………………… 4 分

因为 $D_1D\cap DG=D$, $D_1D,DG\subset$ 平面 D_1BD,所以 $BC\perp$ 平面 D_1BD. ……………………… 5 分

又 $BD\subset$ 平面 D_1BD,所以 $BC\perp BD$. …………………………………………………… 6 分



(2)解:法一:由(1)知 $BC\perp BD$,因为 $DA/\!/BC$,所以 $DB\perp AD$, ……………………… 7 分

又平面 $ADD_1A_1\perp$ 平面 ABD,平面 $ADD_1A_1\cap$ 平面 $ABD=AD$, $BD\subset$ 平面 ABD,

所以 $BD\perp$ 平面 ADD_1A_1, $DF\subset$ 平面 ADD_1A_1,所以 $BD\perp DF$. ……………………… 8 分

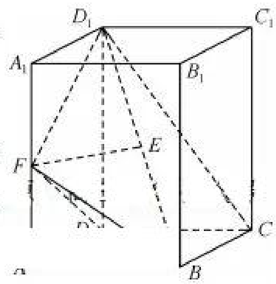
因为 F 为 AA_1 中点,且 $AA_1=2BD=2BC=4$,所以 $DF=2\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}DF\cdot BD=2\sqrt{2}$. ……………………………………………… 9 分

因为 $AF/\!/$ 平面 BDD_1,所以 F 到平面 BDD_1 的距离等于 A 到平面 BDD_1 的距离,

因为 $BC\perp$ 平面 D_1BD, $AD/\!/BC$,所以 $AD\perp$ 平面 D_1BD,

所以 $V_{三棱锥F\text{-}BDE}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDE}\cdot AD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{4}{3}$. ……………………… 11 分



又 $V_{三棱锥E\text{-}BDF}=V_{三棱锥F\text{-}BDE}$,设点 E 到平面 BDF 的距离为 h,

则 $\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}h=\frac{4}{3}$,所以 $h=\sqrt{2}$,即 E 到平面 BDF 的距离为 $\sqrt{2}$. ……………………… 12 分

法二:连接 D_1F,由(1)知 $BC\perp BD$,因为 $DA/\!/BC$,所以 $DB\perp AD$. ……………………… 7 分

因为 F 为 AA_1 中点,且 $AA_1=2BD=2BC=4$,

所以 $A_1D_1=A_1F=FA=AD=2$,

$D_1F\perp DF$, $D_1F=2\sqrt{2}$, $AB=2\sqrt{2}$,

$BF=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，$D_1B=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，…………………………………………………… 9 分

所以 $D_1F^2+BF^2=D_1B^2$，因此 $D_1F\perp BF$，又因为 $DF\cap BF=F$，

所以 $D_1F\perp$平面 BDF. …………………………………………………………………………………… 10 分

因为 E 为 BD_1 的中点，所以点 E 到平面 BDF 的距离为$\frac{1}{2}D_1F=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$. ……………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 C 的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $b^2=\frac{1}{3}a^2$，………………………………………… 2 分

所以$\frac{|NF|}{|MN|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{1}{3}a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)由题意知直线 l 的斜率存在，设其方程为 $y=kx+t(k\neq0)$，

由(1)知 C 的方程为$\frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，…………………………………………………………………………… 5 分

联立$\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{3b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2+6ktx+3t^2-3b^2=0$，…………………………………………… 6 分

由题意知 $\Delta=36k^2t^2-4(3k^2+1)(3t^2-3b^2)=0$，

所以 $t^2=b^2(3k^2+1)$.①………………………………………………………………………………… 7 分

设 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=-\frac{3kt}{3k^2+1}$，$y_0=kx_0+t=\frac{t}{3k^2+1}$. ……………………………………………… 8 分

因为 $|OA|=|OB|$，所以$\left(-\frac{3kt}{3k^2+1}\right)^2+\left(\frac{t}{3k^2+1}\right)^2=t^2$，易知 $t\neq0$，化简得 $k^2=\frac{1}{3}$.② ………………… 9 分

又△OAB 的面积为$\sqrt{3}$，所以$\frac{1}{2}\times\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}\times\sqrt{1+k^2}\left|-\frac{3kt}{3k^2+1}-0\right|=\sqrt{3}$.③ ……………………… 10 分

由①②③得 $t^2=4$，$b^2=2$，从而 $a^2=6$，

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)若 $a=-\frac{1}{2}$，则 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$，且函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}(x>0)$，…………………………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$；令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<1$，…………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以 $f(x)$的极大值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$，无极小值. ………………………………………………………………… 4 分

(2)$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax=\frac{1+2ax^2}{x}(x>0)$，………………………………………………………………… 5 分

①当 $a\geq0$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)$在$[1,e]$上至多有一个零点，不合题意；
…… 6 分

②当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0(x>0)$，得 $0<x<\sqrt{-\frac{1}{2a}}$，令 $f'(x)<0(x>0)$，得 $x>\sqrt{-\frac{1}{2a}}$，

所以 $f(x)$在$\left(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递减，…………………………………… 7 分

所以 $f(x)$仅有一个极大值点$\sqrt{-\frac{1}{2a}}$，且 $f(x)_{极大值}=f\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)=\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}-\frac{1}{2}$. ……………………… 8 分

要使 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上有两个零点，必有 $1<\sqrt{-\frac{1}{2a}}<e$，且 $\begin{cases} f(1)\leqslant 0, \\ f\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right)>0, \\ f(e)\leqslant 0, \end{cases}$ …………………… 9 分

即 $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{2e^2}$，且 $\begin{cases} a\leqslant 0, \\ \ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}-\frac{1}{2}>0, \\ 1+ae^2\leqslant 0, \end{cases}$ …………………… 11 分

解得 $-\frac{1}{2e}<a\leqslant-\frac{1}{e^2}$，

即实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2e},-\frac{1}{e^2}\right]$. …………………… 12 分

22. 解：(1) 因为 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+t^2, \\ y=3t, \end{cases}$ 所以 $t=\frac{y}{3}$，代入消去参数 t，得 $x=2+\frac{y^2}{9}$，

所以曲线 C 的普通方程为 $y^2-9x+18=0$. …………………… 3 分

因为 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，所以 l 的直角坐标方程为 $x-2y-3=0$. …………………… 5 分

(2) 由题意可知点 P 在直线 l 上，故直线 l 的参数方程可以写为 $\begin{cases} x=3+\frac{2}{\sqrt{5}}s, \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}s \end{cases}$ (s 为参数)，代入 C 的普通方程，

得 $s^2-18\sqrt{5}s-45=0$. …………………… 7 分

所以 $\Delta=(-18\sqrt{5})^2+180>0$，设 A，B 所对应的参数分别为 s_1，s_2，则 $s_1+s_2=18\sqrt{5}$，$s_1s_2=-45$，

所以 $\left|\frac{PA}{PB}\right|+\left|\frac{PB}{PA}\right|=\left|\frac{s_1}{s_2}\right|+\left|\frac{s_2}{s_1}\right|=\frac{|s_1|^2+|s_2|^2}{|s_1s_2|}=\frac{(s_1+s_2)^2-2s_1s_2}{|s_1s_2|}=\frac{18^2\times 5+90}{45}=38$. …………………… 10 分

23. 证明：(1) 因为 $b=c$，且 a，b，c 均为正数，所以 $2a+2b=1$，…………………… 1 分

则 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+2b)=4+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{2a}{b}}=8$，…………………… 3 分

当且仅当 $a=b=\frac{1}{4}$ 时，等号成立，故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 8$. …………………… 5 分

(2) 由基本不等式可得 $4a^2+b^2\geqslant 4ab$，当且仅当 $b=2a$ 时等号成立，

$4a^2+c^2\geqslant 4ac$，当且仅当 $c=2a$ 时等号成立，

$c^2+b^2\geqslant 2bc$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，

所以 $4a^2+b^2+c^2\geqslant 2ab+bc+2ac$，当且仅当 $b=c=2a$ 时等号成立. …………………… 8 分

又 $(2a+b+c)^2=4a^2+b^2+c^2+4ab+2bc+4ac\geqslant 6ab+3bc+6ac$，

又 $2a+b+c=1$，

所以 $2ab+bc+2ac\leqslant\frac{1}{3}$，当且仅当 $a=\frac{1}{6}$，$b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立. …………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。